

Секция: Физико-математические науки

ШЕМАХИН ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ

аспирант кафедры Интеллектуальных Систем и Управления

Информационными Ресурсами

Казанский Национальный Исследовательский Технологический Университет

г. Казань, Российская Федерация

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЧЕРЕДЬЮ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ

Процесс установления неизвестных аналитических формул систем массового обслуживания (СМО) открытого типа [1] при помощи реализованной численной модели [3] включает следующие шаги:

1. Выявление принципа вычисления динамической величины указанной характеристики на этапе создания и отладки алгоритма [2], моделирующего исследуемую СМО.
2. Определение оптимальных сочетаний [3] входных параметров СМО, при которых минимальна общая погрешность динамических значений, либо погрешность значений, объединенных общим признаком, зависимость от которых искомой величины очевидна. Найденные наборы параметров позволят исключить влияние генераторов случайных чисел (ГСЧ) системы [4] на результаты.
3. Анализ установленных ранее зависимостей, попытка определения формулы методом подбора при помощи реализованного в программе инструмента «Испытание формул» [3], который позволяет вычислять в реальном времени значения формулы для сохраненных наборов входных параметров и сравнивать с динамическими значениями величин, полученных и отобранных по определенным критериям из испытаний [3].
4. Перебор при помощи «Испытания формул» сомножителей и слагаемых, образующих формулу, либо некоторую её часть, и определение соответствующего набора, при котором погрешность между динамическим и

статическим значением будет минимальна для всех выбранных сочетаний входных параметров СМО. При равной погрешности двух формул алгоритм выбирает ту, которая записана меньшим количеством символов, по окончании перебора программа предоставляет информацию о формулах, выбранных более 1 раза, а также формулах с наименьшей средней и минимальной погрешностями.

Стоит отметить, что описанные шаги не определяют строго последовательность действий при установлении неизвестной аналитической формулы. Шаг № 4, не смотря на трудоемкость и временные затраты описанной процедуры, как правило оказывается лишь вспомогательным инструментом, т.к. анализ результатов и принятие решения остается за исследователем. Тем не менее, при определенной сноровке при помощи этого инструмента появляется возможность подобрать формулу, либо её часть, имеющую наименьшие погрешности, а, следовательно, аппроксимирующую свойства искомой характеристики. Рассмотрим исследуемые характеристики многоканальной СМО открытого типа с очередью ограниченной длины.

1. Среднее число требований обслуженных подряд за период полной занятости прибора $\bar{z}_{n.з.}$. Смысл динамической величины: число требований, поступивших на обслуживание подряд при полной занятости обслуживающего прибора, либо непрерывно занимающие последний свободный канал, разделенные требованиями, заставшими на обслуживающем приборе $m-1$ занятых каналов (при этом обслуживание не было непрерывным). В числителе представлены вероятности состояний системы от p_{m-1} до p_{m+E-1} .

$$\begin{aligned} \bar{z}_{n.з.} &= \frac{\sum_{k=m-1}^{\infty} p_k - p_{omk}}{p_{m-1}} = \frac{\sum_{k=m-1}^{m+E-1} p_k}{p_{m-1}} = \frac{p_0 \cdot \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} + p_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{m} + \dots + \frac{\rho^{E-1}}{m^{E-1}}\right)}{p_0 \cdot \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!}} = \\ &= 1 + \frac{\rho}{m} \cdot \left(\frac{1 - (\rho/m)^E}{1 - \rho/m}\right) = 1 + \frac{\rho}{m - \rho} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E\right) = \frac{m - \rho + \rho - \rho \cdot (\rho/m)^E}{m - \rho} = \frac{1 - (\rho/m)^{E+1}}{1 - \rho/m} \end{aligned} \quad (1)$$

В данной формуле в число обслуженных подряд требований входит то, с которого начинается подсчет (заставшее $m-1$ занятых каналов). Исключив его

из формулы (p_{m-1} в числителе), получим число требований, поступивших на обслуживание за период полной занятости.

$$\begin{aligned} \bar{z}_{n.з.}' &= \frac{\sum_{k=m}^{\infty} p_k}{p_{m-1}} = \frac{\sum_{k=m}^{m+E} p_k}{p_{m-1}} = \frac{p_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{m} + \dots + \frac{\rho^E}{m^E}\right)}{p_0 \cdot \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!}} = \\ &= \frac{\rho}{m} \cdot \left(\frac{1 - (\rho/m)^{E+1}}{1 - \rho/m} \right) = \frac{\rho \cdot (1 - (\rho/m)^{E+1})}{m - \rho} \end{aligned} \quad (2)$$

Максимальная, средняя и минимальная относительная погрешность R данной величины: $R_{\max} = 2.43\%$, $R_{\text{mid}} = 0.28\%$, $R_{\min} = 1.96 \cdot 10^{-14}\%$. Погрешность данной величины растёт при $\rho/m \rightarrow 1$, а также при больших значениях ограничения E . График зависимости значений формулы (1) от приведенной интенсивности потока требований ρ при различных значениях числа обслуживающих каналов m и ограничения числа требований в очереди E показан на рис. 1.

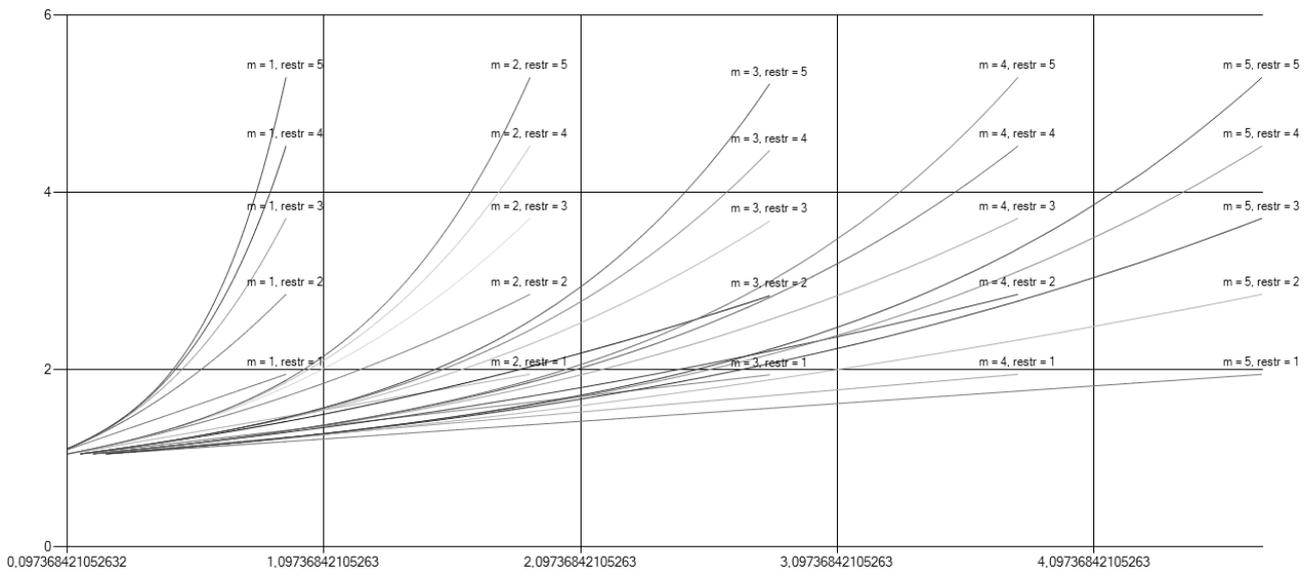


Рисунок 1. Среднее число требований, обслуженных подряд при полной занятости, для СМО с очередью ограниченной длины

2. Среднее время непрерывной работы прибора при полной занятости $\bar{t}_{z.n.з.}$. Данная формула была получена из (2) по аналогии с обобщенными формулами Литтла [1, с. 190].

$$\bar{t}_{z.n.з.} = \left(\frac{\rho \cdot (1 - (\rho/m)^{E+1})}{m - \rho} \right) / \lambda = \frac{1 - (\rho/m)^{E+1}}{(m - \rho) \cdot \mu} \quad (3)$$

Максимальная, средняя и минимальная относительная погрешность R данной величины: $R_{\max} = 5.3\%$, $R_{\text{mid}} = 0.76\%$, $R_{\min} = 8.08 \cdot 10^{-6}\%$. Погрешность данной величины растёт при $\rho/m \rightarrow 0$ и $\rho/m \rightarrow 1$, а также при больших значениях ограничения E . График зависимости значений формулы (3) от приведенной интенсивности потока требований ρ при различных значениях числа обслуживающих каналов m и ограничения числа требований в очереди E показан на рис. 2. Интенсивность потока требований для данного графика фиксирована.

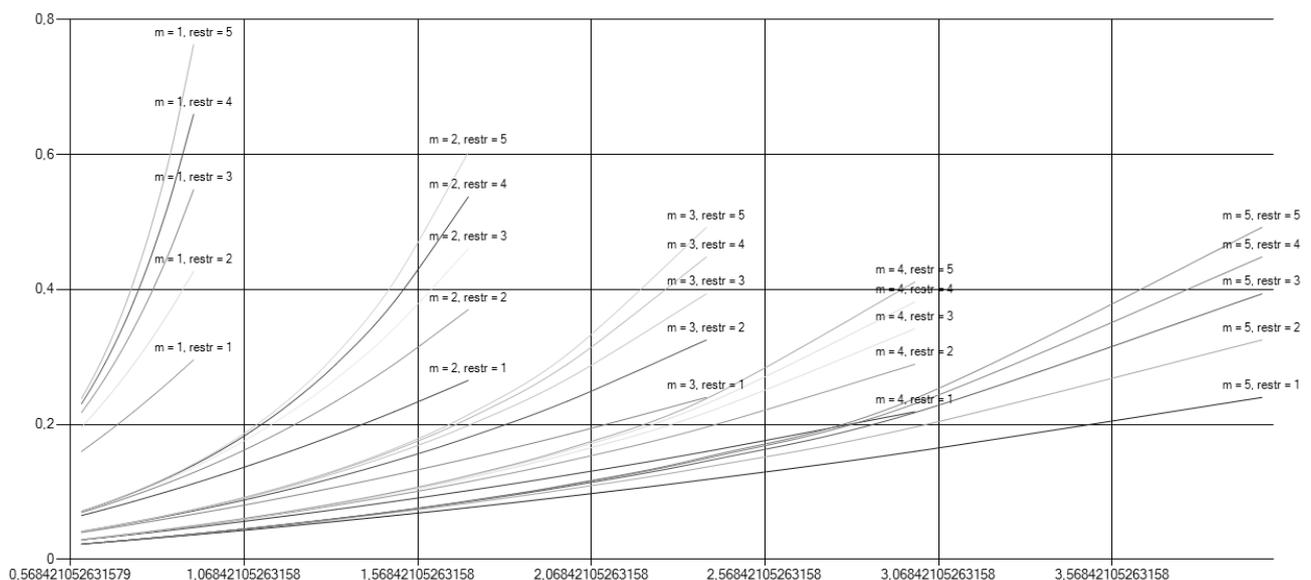


Рисунок 2. Среднее время непрерывной работы прибора при полной занятости для СМО с очередью ограниченной длины

При помощи созданного программного обеспечения [3], моделирующего многоканальные системы массового обслуживания открытого типа с ограничениями [1], а также обладающего широким функционалом и удобным интерфейсом, получены аналитические формулы следующих величин:

1. Среднее количество требований, обслуженных подряд при полной занятости обслуживающего прибора;
2. Среднее время непрерывной работы обслуживающего прибора при полной занятости.

Вспомогательные инструменты данного программного обеспечения, реализованные для исследования зависимостей характеристик, определения

аналитических формул и удобного представления результатов, позволяют упростить процесс исследования, а также возложить часть действий (порой большую) на ЭВМ.

Литература:

1. А.П. Кирпичников, Методы прикладной теории массового обслуживания. Казань, Изд-во Казанского университета, 2011. 200 с.
2. Шемахин Е.Ю., Кирпичников А.П. *Моделирование многоканальных открытых систем массового обслуживания с ограничениями в среде Visual Studio 2010*, Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т.18, №3.
3. Шемахин Е.Ю., Моделирование СМО открытого типа. Проверка численной модели, «Вестник науки и образования». 2015. №2(4).
4. Шемахин Е.Ю., Моделирование СМО открытого типа. ГСЧ, «European research». 2015. № 2(3).
5. Microsoft Developer Network. [Электронный ресурс]: Руководство по программированию на C#. URL: <https://social.msdn.microsoft.com/Search/ru-RU> (дата обращения: 28.10.2014).