Султыгов М.Д.

кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики,
Ингушский государственный университет

УСИЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ И МОДУЛЯ ОПЕРАТОРА ФУНКЦИИ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МОКАНУ.

Аннотация

Рассматриваются вопросы геометрической теории функций многих комплексных переменных на специальных подмножествах области голоморфности. Получены двусторонние оценки функционалов, играющих важную роль в теории однолистности, и построены экстремальные функции, которые данные неравенства превращают в точные равенства на некоторых подмножествах.

Ключевые слова.

Голоморфность функции, единичный шар, поликруг, операторы дифференцирования и интегрирования, кратнокруговая область, экстремальные функции, многомерный аналог функции Мокану, гипергеометрическая функция Гаусса, функционал.

Key words.

Holomorphic functions, unit ball, polyreg, operators of differentiation and integration, cytochrome region, extreme functions, multidimensional analogue of Mocanu functions, the hypergeometric function of Gauss, functionality.

Для простоты изложения все рассуждения проведем для функций $f(z_1, z_2) \in H(D \subset C^2)$. В [1] определен класс голоморфных функций Мокану $MN_D(\alpha, \beta)$. двух комплексных переменных.

Теорема 1.Функция $f(z_1, z_2) \in MN_D(\alpha, \beta)$, $\alpha \in R_+^1$, $0 \le \beta < 1$ тогда и только тогда, когда существует функция $F(z_1, z_2) \in M_D$ [2] такая, что

$$f(z_1, z_2) = \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \left[F(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2 \right]^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} d\varepsilon \right\}^{\alpha}, \qquad (1)$$

где для степенной функции взято главное значение.

Теорема 2. [3] Пусть $f(z_1, z_2) \in MN_D(\alpha, \beta)$, $\alpha \in R_+^1$ тогда в $\overline{D}_r = r\overline{D}$,$0 \le r < 1$ справедливы следующие оценки:

$$l(\alpha,\beta,-r)\le\left|f(z_1,z_2)\right|\le l(\alpha,\beta,r), \tag{2}$$

$$L(\alpha,\beta,-r)\le\left|R_1 f(z_1,z_2)\right|\le L(\alpha,\beta,r), \tag{3}$$

где

$$l(\alpha,\beta,r)=\left\{\theta\left(\frac{1}{\alpha},\frac{2-2\beta}{\alpha},1+\frac{1}{\alpha};r\right)\right\}^{\alpha}, \tag{4}$$

$$L(\alpha,\beta,r)=(1-r)^{\frac{2\beta-2}{\alpha}}\left\{l(\alpha,\beta,r)\right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \tag{5}$$

а

$$\theta(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{c-a-1}(1-zu)^{-b}\,du$$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Отметим несколько следствий из теоремы 2 и покажем точность полученных оценок.

В пространстве двух комплексных переменных вводим области

$$K_{1,\sigma}^2=\left\{z\in C^2:(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}}+(a_2|z_2|^{\frac{1}{\sigma}}<1,\ a_1,a_2>0,\ 0<\sigma\le 1\right\}$$

и поликруг $U_{R_1,R_2}^2=\left\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|<R_1,|z_2|<R_2\right\}$;

множества:

$$\left\{\frac{|z_1|}{a_1}=\frac{|z_2|}{a_2}\right\}\cap K_{1,\sigma}^2\ , \tag{6}$$

$$\left\{a_1|z_1|=a_2|z_2|\right\}\cap K_{1,\sigma}^2 \tag{7}$$

$$\left\{\frac{|z_1|}{R_1}=\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U_{R_1,R_2}^2(k)\,, \tag{8}$$

$$U_{R_1,R_2}^2(1)=\left\{\left(\frac{|z_1|}{R_1}=\frac{|z_2|}{R_2}\right)\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}, \tag{9}$$

$$U_{R_1,R_2}^2(2)=\left\{\left(\frac{|z_1|}{R_1}>\frac{|z_2|}{R_2}\right)\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}, \tag{10}$$

$$U_{R_1,R_2}^2(3)=\left\{\left(\frac{|z_1|}{R_1}<\frac{|z_2|}{R_2}\right)\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}; \tag{11}$$

и величины:

$$\omega(|z_1|,|z_2|)=\left\{(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}}+(a_2|z_2|^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{\sigma}, \tag{12}$$

$$\gamma_k(|z_1|,|z_2|)=\max_{z\in U^2_{R_1,R_2}(k)}\left\{\frac{|z_1|}{R_1},\frac{|z_2|}{R_2}\right\},\text{ где } k=1,2,3. \tag{13}$$

где $U^2_{R_1,R_2}(k), k=1,2,3$ определены в (9) – (11), а также операторы [1,333] дифференцирования: $R_0, R_\gamma : H(D)\Rightarrow H(D), \gamma\in R_+$. $R_0 f \overset{\det}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i\dfrac{\partial f}{\partial z_i}, R_\gamma f \overset{\det}{=} \gamma f + R_0 f$;

и интегрирования $R_\gamma^{(-1)} f(z_1,z_2)=\int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)\,d\varepsilon.$

Следствие 1. Если $f(z_1,z_2)=1+\sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,k_2} z_1 z_2 \in MN_{K^2_{1,\sigma}}(\alpha,\beta)$ в $K^2_{1,\sigma}$ имеем:

$$l(\alpha,\beta,-\omega(|z_1|,|z_2|))\le |f(z_1,z_2)|\le l(\alpha,\beta,\omega(|z_1|,|z_2|)), \tag{14}$$

$$L(\alpha,\beta,-\omega(|z_1|,|z_2|))\le |R_1 f(z_1,z_2)|\le L(\alpha,\beta,\omega(|z_1|,|z_2|)), \tag{15}$$

Точность этих оценок в случае области $K^2_{1,1}$ достигается функцией

$$f(z_1,z_2)=\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^1 [\varepsilon F(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)]^{\frac{1}{\alpha}}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}^{\alpha} \tag{16}$$

где

$$F(z_1,z_2)=[1-a_1 z_1 e^{i\alpha_1}-a_2 z_2 e^{i\alpha_2}]^{2(\beta-1)}.$$

Эти же оценки в случае области $K^2_{1,\sigma}$, $\sigma\neq 1$ на множестве (7) также точны. Они достигаются функцией вида (16), в которой $F(z_1,z_2)=[1-2^{\sigma-1}(a_1 z_1 e^{i\alpha_1}+a_2 z_2 e^{i\alpha_2})]^{2(\beta-1)}$.

Следствие 2. Для функций $f(z_1,z_2)\in MN_{U^2_{R_1,R_2}(k)}(\alpha,\beta)$, то в $U^2_{R_1,R_2}(k), k=1,2,3$ справедливы неравенства:

$$l(\alpha,\beta,-\gamma_k(|z_1|,|z_2|))\le |f(z_1,z_2)|\le l(\alpha,\beta,\gamma_k(|z_1|,|z_2|)), \tag{17}$$

$$L(\alpha,\beta,-\gamma_k(|z_1|,|z_2|))\le |R_1 f(z_1,z_2)|\le L(\alpha,\beta,\gamma_k(|z_1|,|z_2|)), \tag{18}$$

Точность этих оценок на множестве (8) реализуется функцией вида (16), где

$$F(z_1, z_2) = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1 e^{i\alpha_1}}{R_1} + \frac{z_2 e^{i\alpha_2}}{R_2}\right)\right]^{2(\beta-1)}.$$

Литература.

1.Султыгов М.Д. О функциях Мокану порядка β двух комплексных переменных. // Математический анализ и его приложения. - Грозный.- 1984.- С. 86 – 100.

2. Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций. - М.-1976.- 99 с.

3.Султыгов М.Д. Экстремальные вопросы в классе функций Мокану нескольких комплексных переменных. // Исследования по теории функций и их приложения к уравнениям в частных производных. – Орджоникидзе.- 1986.-С. 66 – 71.

4. Султыгов М.Д. Звездно-выпуклые функции многих комплексных переменных в пространстве Рейнхардта. Сборник научных трудов Ингушского госуниверситета. - Нальчик.-2004.- №2.-С. 333 – 362.