

Фізико-математичні науки

УДК 517.9:519.6

Марченко Ольга Олексіївна

*кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник лабораторії №141
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України*

Marchenko Olha

*PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher
Laboratory of V.M. Glushkov Institute of Cybernetics*

Самойленко Тетяна Анатоліївна

*кандидат фізико-математичних наук,
асистент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Samoilenko Tetiana

*PhD in Physics and Mathematics,
Assistant of Mathematical Physics and Differential Equations Department
NTUU «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»*

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕІЗОТЕРМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В
НЕОДНОРІДНОМУ ДВОФАЗОВОМУ ҐРУНТОВОМУ
СЕРЕДОВИЩІ У ВИПАДКУ ОСЬОВОЇ СИМЕТРІЇ
RESEARCH OF THE DYNAMICS OF NON-ISOTHERMAL
PROCESSES IN THE HETEROGENEOUS TWO-PHASE SOIL
MEDIUM IN THE CASE OF AXIAL SYMMETRY**

***Анотація.** Для осесиметричної початково-крайової задачі
фільтрації, теплоперенесення та пружної деформації із змішаними
неоднорідними крайовими умовами та умовами спряження отримано*

оцінки швидкості збіжності неперервного за часом наближеного розв'язку, побудованого на базі методу скінченних елементів.

Ключові слова: фільтрація, теплоперенесення, пружна деформація, неоднорідне ґрунтове середовище, осесиметрична початково-крайова задача, узагальнений розв'язок, метод скінченних елементів.

Summary. For the axisymmetric initial-boundary value problem of filtration, heat transfer, and elastic deformation with mixed heterogeneous boundary conditions and conjugation conditions, estimates of the rate of convergence of the time-continuous approximate solution constructed on the basis of the finite elements method have been obtained.

Key words: filtration, heat transfer, elastic deformation, heterogeneous soil medium, axisymmetric initial boundary value problem, generalized solution, finite elements method.

Поглиблене дослідження динаміки взаємопов'язаних фаз ґрунтового середовища в осесиметричній постановці є актуальною проблемою. Промислова експлуатація нафто- та водоносних горизонтів, запасів геотермальних вод може призвести до осідання поверхні землі на великих територіях при ущільненні слабких водонасичених ґрунтів навколо вертикальних дрен, свдловин через збільшення тиску, що зазнають породи, які складають водоносні горизонти і яке може бути спричинене крім зовнішнього навантаження від будинків та споруд також зниженням рівня підземних вод або зменшенням їхнього напору (для напірних вод). Проблема розрахунку та передбачення стану багатofазного ґрунтового масиву також виникає в результаті гідродинамічного впливу на вугільний пласт з метою вивільнення метану, в процесі дослідження функціонування арочної греблі [1, с. 84-86] тощо. Отримані результати можна в подальшому застосовувати і для дослідження в циліндричних координатах

задач, що моделюють стан ґрунту в процесі міграції вологи при його сезонному промерзанні [2, с. 24-32].

Математична постановка задачі Нижче сформульовано початково-крайову задачу для системи нестационарних рівнянь фільтрації, теплопереносу та пружної деформації для ізотропного ґрунтового масиву в циліндричній системі координат з неоднорідними змішаними крайовими умовами, включно з умовами теплообміну з зовнішнім середовищем та з урахуванням зовнішнього навантаження, а також за наявності тонких слабопроникних та слаботривких включень [3, с. 763-765; 4, с. 41-43]:

$$\begin{aligned} r\tilde{\mu}(h)\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(rk(u_r, u_z, T)\frac{\partial h}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(k(u_r, u_z, T)\frac{\partial h}{\partial z}\right), \\ c_T r\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial r} - c_w v_r(h)T\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z} - c_w v_z(h)T\right), \\ \rho r\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + r\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - r\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \rho r\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + r\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) - r\frac{\partial p}{\partial z} = -r\rho g, \end{aligned} \quad (1)$$

де $(r, z, t) \in \Omega_{\tilde{T}} = \Omega \times (0, \tilde{T}]$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $0 < r_0 \leq r \leq r_1 < \infty$, $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$, h – п'єзометричний напір, $T(r, z, t)$ – температура, $k(u_r, u_z, T)$ – коефіцієнт вологоперенесення, $\tilde{\mu}(h)$ – вологоємність, $\tilde{\lambda}$ – коефіцієнт теплопровідності, c_T, c_w – об'ємні теплоємності ґрунту і рідини в порах, $v(h) = (v_r(h), v_z(h))^T$ – швидкість вологоперенесення-фільтрації, $(u_r(r, z, t), u_z(r, z, t))^T$ – вектор зміщень скелету ґрунту, $p = \rho_g g(h - z)$ –

гідростатичний тиск, ρ_g – щільність рідини, ρ – щільність ґрунту, λ, μ – коефіцієнти Ламе.

Умови спряження на ділянці контакту γ $\gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$,
 $\gamma = \{(r, z) : r = r_2, r_0 < r_2 < r_1, z_0 \leq z \leq z_1\}$:

$$\left\{ k(u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial r} \right\}^{\pm} = R_1(z, t)[h], \left\{ (\tilde{\lambda} - c_w v_r T) \frac{\partial T}{\partial r} \right\}^{\pm} = R_2(z, t)[T], \quad (2)$$

$$[u_n] = 0, \quad (3)$$

$$[\sigma_n] = 0, [\tau_s] = 0, \{\tau_s\}^{\pm} = R_3(z, t)[u_s], \quad (4)$$

де $(r, z, t) \in \gamma_{\tilde{T}} = \gamma \times (0, \tilde{T}]$, n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega_1$ на γ ; $[\chi]$ – стрибок функції, σ_n, τ_s – нормальна та дотична складові вектора напружень.

Крайові умови задамо наступним чином

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}], \quad (5)$$

$$h = \tilde{h}(r, z, t), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}], \quad (6)$$

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha(T(r, z, t) - T_{cp}), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}], \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (r, z, t) \in \Gamma_4 \times (0, \tilde{T}], \quad (8)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad (r, z, t) \in \Gamma_4 \times (0, \tilde{T}]; \quad (9)$$

$$u_1 = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}], \quad (10)$$

$$\tau_s = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}], \quad (11)$$

$$\sigma_n = S(r, z, t), \quad \tau_s = \hat{S}(r, z, t), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}]; \quad (12)$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega \setminus \gamma$, $\Gamma_1 = \{(r, z) : r = r_0, 0 \leq z \leq z_1\}$,

$\Gamma_2 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = z_1\}$, $\Gamma_3 = \{(r, z) : r = r_1, 0 \leq z \leq z_1\}$,

$\Gamma_4 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = 0\}$; $\alpha = \text{const} > 0$ – коефіцієнт теплообміну, T_{cp} –

температура зовнішнього середовища, n – зовнішня нормаль до контуру, σ_n, τ_s – нормальна та дотична складові вектора напружень, $S(r, z, t)$, $\hat{S}(r, z, t)$ – задані функції достатньої гладкості.

Початкові умови:

$$\begin{aligned} h(r, z, 0) &= H_0(r, z), \quad T(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}, \\ u_r(r, z, 0) &= U_{r,0}(r, z), \quad u_z(r, z, 0) = U_{z,0}(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, 0) &= U_{r,1}(r, z), \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, 0) = U_{z,1}(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Припускаємо, що задані функції $\tilde{\mu}(h), k(u_r, u_z, T), H_0(r, z), T_0(r, z), U_{r,0}(r, z), U_{z,0}(r, z), U_{r,1}(r, z), U_{z,1}(r, z)$ достатньо гладкі на $\Omega_{\tilde{T}}$.

Формулювання узагальненої задачі Позначимо Z – множину вектор-функцій $w(r, z, t) = (h(r, z, t), T(r, z, t), u_r(r, z, t), u_z(r, z, t))^T = (w_1(r, z, t), w_2(r, z, t), w_3(r, z, t), w_4(r, z, t))^T$, компоненти яких і їх похідні по часу $\frac{\partial w}{\partial t}(r, z, t), \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(r, z, t), \forall t \in (0, \tilde{T}], \frac{\partial w}{\partial t}(r, z, 0)$ разом з $w(r, z, 0)$ належать простору $W_2^1(\Omega)$ і задовольняють головним крайовим умовам (6), (9), (10) та головним умовам спряження (3).

Множині Z_0 належать вектор-функції

$v(r, z) = (v_h(r, z), v_T(r, z), v_r(r, z), v_z(r, z))^T = (v_1(r, z), v_2(r, z), v_3(r, z), v_4(r, z))^T$ з компонентами із простору $W_2^1(\Omega)$, які задовольняють однорідним головним крайовим умовам, які відповідають (6), (9), (10), і однорідним головним умовам спряження (3).

На основі методу Гальоркіна і в припущенні виконання додаткової умови $\frac{\partial h}{\partial t}(r, z, 0) = \tilde{H}_0(r, z), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(r, z, 0) = \tilde{T}_0(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega},$ де $\tilde{H}_0(r, z),$

$\tilde{T}_0(r, z)$ достатньо гладкі на $\Omega_{\tilde{T}}$, сформульована наступна узагальнена задача:

$$\begin{aligned} \bar{m} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, v \right) + m \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, v \right) + A(w; w, v) &= (F, v) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}] \quad \forall v \in Z_0, \\ \bar{m} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, v \right) &= \iint_{\Omega} \rho r \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} v_r + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} v_z \right) d\Omega, \\ m \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, v \right) &= \iint_{\Omega} r \left(\tilde{\mu}(h) \frac{\partial h}{\partial t} v_h + c_T r \frac{\partial T}{\partial t} v_T \right) d\Omega, \\ A(w; w, v) &= a(w; w, v) - b_1(w; w, v) + b_2(w, v), \\ a(w; w, v) &= \iint_{\Omega} r \left(k(u_r, u_z, T) \left(\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) + \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v_T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{u_r v_r}{r^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) d\Omega + \\ &\quad + \int_{\gamma} r \left(R_1(z) [h] [v_h] + R_2(z) [T] [v_T] + R_3(z) [u_z] [v_z] \right) d\gamma, \\ b_1(w; w, v) &= \iint_{\Omega} r c_w \psi(h) T \left(\frac{\partial v_T}{\partial r} + \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) d\Omega, \\ b_2(w, v) &= \iint_{\Omega} r \left(\frac{\partial(p(h))}{\partial r} v_r + \frac{\partial(p(h))}{\partial z} v_z \right) d\Omega - \int_{\Gamma_2} r \alpha T v_T d\Gamma_2, \\ (F, v) &= \int_{\Gamma_2} r \alpha T_{cp} v_T d\Gamma - \iint_{\Omega} r \rho g v_z d\Omega + \int_{\Gamma_2} r \left(S(r, z, t) v_r + \hat{S}(r, z, t) v_z \right) d\Gamma, \quad (14) \\ (w(\cdot, \cdot, 0), v) &= (\tilde{w}^0, v), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, \cdot, 0), v \right) = (\tilde{w}^1, v) \quad \forall v \in Z_0, \quad (15) \end{aligned}$$

де $(,)$ – скалярний добуток, $\tilde{w}^0 = (H_0(r, z), T_0(r, z), U_{r,0}(r, z), U_{z,0}(r, z))^T$,
 $\tilde{w}^1 = (\tilde{H}_0(r, z), \tilde{T}_0(r, z), U_{r,1}(r, z), U_{z,1}(r, z))^T$.

Побудова наближеного узагальненого розв’язку Неперервний за часом наближений узагальнений розв’язок задачі (1)-(13) будемо шукати методом скінчених елементів (МСЕ) на підмножині $Z^N \subset Z$. Довільна вектор-функція $w^N(r, z, t) \in Z^N$ може бути записана у вигляді

$$w^N(r, z, t) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i(t) \Phi_i(r, z), \quad (16)$$

де $N' = 4N$ – кількість вектор-функцій, що відповідають всім N вузловим точкам в розбитті області $\bar{\Omega}$; $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, N'}$ – функції, інтегровні разом з другою похідною на $(0, \tilde{T}]$; $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ – базис множини Z_t^N , яка отримується із Z^N фіксуванням $\forall t \in (0, \tilde{T}]$. Компоненти цього базису мають вигляд

$$\Phi_i = (\varphi_i, 0, 0, 0)^T, \quad \Phi_{N+i} = (0, \varphi_i, 0, 0)^T, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\Phi_{2N+2i-1} = (0, 0, \varphi_i, 0)^T, \quad \Phi_{2N+2i} = (0, 0, 0, \varphi_i)^T, \quad i = \overline{1, N},$$

де $\{\varphi_i(r, z)\}_{i=1}^N$ – сукупність лінійно-незалежних функцій, що відповідають вузловим точкам МСЕ, побудованих на повних поліномах степеня k ($k=1, 2, 3$) і мають в $\bar{\Omega}$ обмежений носій.

Базис підмножини $Z_0^N \subset Z_0$ аналогічно складається з $N'' = N' - N^1$ вектор-функцій Φ_i , які відповідають функціям $\varphi_i(r, z)$, $i = \overline{1, N}$, тобто довільна вектор-функція $z^N(r, z) \in Z_0^N$ може бути представлена у вигляді

$$z^N = \sum_{i=1}^{N''} \beta_i \Phi_i(r, z), \quad (17)$$

де β_i – константи, N^1 – кількість базисних функцій, що відповідають вузловим точкам на ділянках з крайовими умовами першого роду.

Наближений узагальнений розв’язок задачі (14), (15) $w^N(r, z, t) \in Z^N$ задовольняє наступним інтегральним співвідношенням

$$\bar{m}\left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2}, v^N\right) + m(w^N; \frac{\partial w^N}{\partial t}, v^N) + A(w^N; w^N, v^N) = (F, v^N) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}], \quad (18)$$

$$(w^N(\cdot, \cdot, 0), v^N) = (\tilde{w}^0, v^N), \quad \left(\frac{\partial w^N}{\partial t}(\cdot, \cdot, 0), v^N\right) = (\tilde{w}^1, v^N) \quad \forall v^N \in Z_0^N. \quad (19)$$

Для вектор-функцій вигляду $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ і для скалярної функції u визначення норм в просторах наведено, наприклад, в [3, с. 766].

Нехай виконуються такі умови

$$0 < \tilde{\mu}_0 \leq \tilde{\mu}(h) \leq \tilde{\mu}_1 < \infty,$$

$$0 < \bar{K} \leq k(u_r, u_z, T) \leq \bar{\bar{K}} < \infty,$$

$$|k(v_1, u_1, s_1) - k(v_2, u_2, s_2)| \leq K_1 (|v_1 - v_2| + |u_1 - u_2| + |s_1 - s_2|)$$

$$|\tilde{\mu}(v_1) - \tilde{\mu}(v_2)| \leq M_1 |v_1 - v_2|, \quad |v_i(u_1) - v_i(u_2)| \leq \bar{N}_1 |u_1 - u_2|$$

$$\forall v_i, u_j, s_j \in R, i, j = 1, 2,$$

$$\bar{M}_2 \leq \left| \frac{\partial \tilde{\mu}(h)}{\partial t} \right| \leq M_2, \quad \bar{M}_3 \leq \left| \frac{\partial^2 \tilde{\mu}(h)}{\partial t^2} \right| \leq M_3,$$

$$\bar{K}_2 \leq \left| \frac{\partial k(u_r, u_z, T)}{\partial t} \right| \leq K_2, \quad \bar{K}_3 \leq \left| \frac{\partial^2 k(u_r, u_z, T)}{\partial t^2} \right| \leq K_3,$$

$$\bar{N}_2 \leq \left| \frac{\partial v_i(h)}{\partial t} \right| \leq N_2, \quad \bar{N}_3 \leq \left| \frac{\partial^2 v_i(h)}{\partial t^2} \right| \leq N_3, i = 1, 2,$$

$$0 < R_1^0 \leq |R_1(v)| \leq R_1^1, \quad 0 < R_2^0 \leq |R_2(v)| \leq R_2^1, \quad 0 < R_3^0 \leq |R_3(v)| \leq R_3^1,$$

$$|R_1(v) - R_1(u)| \leq R_1^2 |v - u|, \quad |R_2(v) - R_2(u)| \leq R_2^2 |v - u|,$$

$$|R_3(v) - R_3(u)| \leq R_3^2 |v - u|, \quad \bar{K}, \bar{\bar{K}}, K_i, K_i^j = \text{const}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(u), k(u, v, s), R_1(v), R_2(v), R_3(v) \in C^1(\Omega) \forall t \in (0, \tilde{T}], \\ (K)''_{lr}, (K)''_{lz}, (K)'''_{lrr}, (K)'''_{lzz} \in L_\infty(\Omega_{\tilde{T}}), \quad \forall u, v \in Z. \end{aligned} \quad (20)$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай $w(x, y, t) \in Z$ – розв’язок задачі (14), (15), а $w^N(r, z, t) \in Z^N$ – розв’язок задачі (18), (19). Припустимо, що $\tilde{w}^0, \tilde{w}^1 \in W_2^{k+1}(\Omega)$; $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \in L_2(0, \tilde{T}; W_2^{k+1}(\Omega)) \cap L_\infty(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))$. Тоді існує $C = \text{const} > 0$ така, що виконується оцінка

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (w(r, z, t) - w^N(r, z, t)) \right\|_{L_\infty(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \\ + \left\| w(r, z, t) - w^N(r, z, t) \right\|_{L_\infty(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} \leq Cs^k \end{aligned} \quad (21)$$

де s – максимальна довжина сторін трикутників, $k=1, 2, 3$ – степінь многочленів МСЕ.

Доведення. Покладемо

$$\psi = w^N - \tilde{w}, \quad \eta = w - \tilde{w}, \quad l = w - w^N, \quad (22)$$

де $\tilde{w} = \tilde{w}(x, y, t) \in Z^N$ і $\forall t \in (0, \tilde{T}]$ задовольняє умові

$$A(w; w - \tilde{w}, v) = 0, \quad \forall v \in Z_0^N, \quad (23)$$

в якій A має вигляд (14).

Тоді використовуючи співвідношення (14), (18), (22), (23) і поклавши $v := \frac{\partial \psi}{\partial t}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + m \left(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + A(w^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) = \bar{m} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \\ + m \left(w; \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - m \left(w^N; \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + A(w; \tilde{w}, \frac{\partial \psi}{\partial t}) - A(w^N; \tilde{w}, \frac{\partial \psi}{\partial t}) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
 A(\hat{w}; w, v) &= \mathbf{W}_1(\hat{w}; w, v) + \mathbf{W}_{\gamma,1}(w, v) + \mathbf{W}_2(w, v) + \mathbf{W}_{\gamma,2}(w, v) - \\
 &\quad - \mathbf{W}_3(\hat{w}; w, v) + \mathbf{W}_4(w, v), \\
 \mathbf{W}_1(\hat{w}; w, v) &= \iint_{\Omega} r \left(k(\hat{u}_r, \hat{u}_z, T) \left(\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) + \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v_T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) \right) d\Omega, \\
 \mathbf{W}_2(w, v) &= \iint_{\Omega} r \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{u_r v_r}{r^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad + \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
 &\quad \left. + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) d\Omega, \\
 \mathbf{W}_{\gamma,1}(w, v) &= \int_{\gamma} r R_1(z) [w_1] [v_1] d\gamma + \int_{\gamma} r R_2(z) [w_2] [v_2] d\gamma, \\
 \mathbf{W}_{\gamma,2}(w, v) &= \int_{\gamma} r R_3(z) [w_4] [v_4] d\gamma, \\
 \mathbf{W}_3(\hat{w}; w, v) &= \iint_{\Omega} r c_w \mathfrak{v}(\hat{w}_1) T \left(\frac{\partial v_T}{\partial r} + \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) d\Omega, \\
 \mathbf{W}_4(w, z) &= \iint_{\Omega} r \left(\frac{\partial(p(\hat{w}_1))}{\partial r} v_3 + \frac{\partial(p(\hat{w}_1))}{\partial z} v_4 \right) d\Omega - \int_{\Gamma_2} r \alpha w_2 v_2 d\Gamma_2. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Оцінімо ліву і праву частини (24) з урахуванням нерівності Коші-Буняковського. З формул (14), (20), $\forall t \in (0, T]$ маємо

$$\begin{aligned}
 \left| \bar{m} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right| &\leq \rho_{zp} r_1 \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial t^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial t^2} \frac{\partial \psi_4}{\partial t} \right| d\Omega \leq \rho_{zp} r_1 \left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}, \\
 \left| m(w; \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}) - m(w^N; \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}) \right| &\leq \\
 &\leq \iint_{\Omega} r_1 \left| \tilde{\mu}(\hat{h}) - \tilde{\mu}(\hat{h}^N) \right| \left| \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right| d\Omega \leq c_1 \|l\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}, \\
 c_1 &= c_1(r_1, M_1, \left\| \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} \right\|_{L_{\infty}(\Omega_{\tilde{T}})}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbf{W}_1(w; \tilde{w}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) - \mathbf{W}_1(w^N; \tilde{w}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) \right| \leq \\
 & \leq \iint_{\Omega} r_1 \left| k(\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{T}) - k(\hat{u}_r^N, \hat{u}_z^N, \hat{T}^N) \right| \left| \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial r} + \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial z} \right| d\Omega \leq \\
 & \leq c_2 \|l\|_{W_2^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad c_2 = c_2(r_1, K_1, \left\| \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial r} \right\|_{L_\infty(\Omega_{\tilde{T}})}, \left\| \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} \right\|_{L_\infty(\Omega_{\tilde{T}})}), \\
 & \left| \mathbf{W}_3(w; \tilde{w}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) - \mathbf{W}_3(w^N; \tilde{w}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) \right| \leq \\
 & \leq \iint_{\Omega} r_1 c_w \left(\left| v_1(w) - v_1(w^N) \right| \left| \tilde{w}_2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial r} \right| + \left| v_2(w) - v_2(w^N) \right| \left| \tilde{w}_2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial z} \right| \right) d\Omega \leq \\
 & \leq c_3 \|l\|_{W_2^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad c_3 = c_3(r_1, c_w, \bar{\bar{K}}, \|\tilde{w}_2\|_{L_\infty(\Omega_{\tilde{T}})}), \\
 & \left| \mathbf{W}_3(w^N; \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) \right| \leq \iint_{\Omega} r_1 c_w \Psi_2 \left(v_1(w^N) \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial r} + v_2(w^N) \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial z} \right) d\Omega \leq \\
 & \leq c_4 \|\Psi_2\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}, \\
 & c_4 = c_4(r_1, c_w, \bar{\bar{K}}, \left\| \frac{\partial w_1^N}{\partial r} \right\|_{L_\infty(\Omega_{\tilde{T}})}, \left\| \frac{\partial w_1^N}{\partial z} \right\|_{L_\infty(\Omega_{\tilde{T}})}), \\
 & \left| \mathbf{W}_4(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) \right| \leq r_1 \rho_\varepsilon g \iint_{\Omega} p(\Psi_1) \left(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t \partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial t \partial z} \right) d\Omega + r_1 \alpha \int_{\Gamma_2} \Psi_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} d\Gamma_2 \leq \\
 & \leq c_5 \left(\|\Psi_1\|_{L_2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \right) + \|\Psi_2\|_{L_2(\Gamma_2)} \left\| \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right\|_{L_2(\Gamma_2)} \right), \\
 & c_5 = c_5(r_1, \rho_\varepsilon, g, \alpha), \\
 & \left| \mathbf{W}_4(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}) \right| \geq c_6 \|\Psi_1\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad c_6 = c_6(r_0, \rho_\varepsilon, g). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Беручи до уваги позначення (14), (25), запишемо

$$\bar{m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} m(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}) &= \frac{d}{dt} m(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi) - m(w^N; \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \psi) - m(\frac{\partial w^N}{\partial t}; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}), \\ \mathbf{W}_1(w^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{W}_1(w^N; \psi, \psi) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_1(w^N; \psi, \psi), \\ \mathbf{W}_2(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{W}_2(\psi, \psi), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{де } \tilde{\mathbf{W}}_1(w^N; \psi, \psi) = \iint_{\Omega} r \frac{\partial k}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega.$$

Із умов (20) випливає

$$\begin{aligned} \left| m\left(w^N; \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \psi\right) \right| &\leq r_1 \left(\tilde{\mu}_1 \left(\left\| \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + c_T \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \\ \left| m\left(\frac{\partial w^N}{\partial t}; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right| &\leq r_1 \left(M_2 \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_T \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \\ \left| m\left(\frac{\partial w^N}{\partial t}; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right| &\geq r_0 \left(\bar{M}_2 \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_T \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \\ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_1(w^N; \psi, \psi) &\leq c_7 \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad c_7 = c_7(r_1, \rho_\epsilon, g, K_2), \\ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_1(w^N; \psi, \psi) &\geq c_8 \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad c_8 = c_8(r_0, \rho_\epsilon, g, \bar{K}_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Для заданої області, враховуючи наступну оцінку з використанням формули Гріна норми $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ по межі $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} u^2 \cos(n, r) d\Gamma + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} u^2 \cos(n, z) d\Gamma + \\ &+ \int_{\gamma^+} u^2 \cos(n, r) d\Gamma + \int_{\gamma^-} u^2 \cos(n, r) d\Gamma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(u^2) \right) d\Omega = 2 \iint_{\Omega} u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega \leq \\
 &\leq C_1 \left(\iint_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega \right)^{1/2} = C_1 \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

а також записану у загальному випадку нерівність Фрідрікса, ε -нерівність, можемо записати

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_3 \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_3 C_1 \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \\
 &\leq \left(C_2 + \frac{C_3 C_1}{4\varepsilon} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_3 C_1 \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Оберемо в останній нерівності ε так, щоб $1 - C_3 C_1 \varepsilon > 0$. Отже, для розглядуваної області $\Omega \exists C_4 = \text{const} > 0$ така, що $\forall u \in W_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_4 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (32)$$

Підставимо в рівність (24) співвідношення (26)-(29). У результаті отримаємо після використання нерівності трикутника $\|l\| \leq \|\psi\| + \|\eta\|$,

нерівності $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ та співвідношень (30)-(32):

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left[\bar{m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + m(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi) + \mathbf{W}_1(w^N; \psi, \psi) + \mathbf{W}_{\gamma,1}(\psi, \psi) + \mathbf{W}_2(\psi, \psi) + \right. \\
 &\left. \mathbf{W}_{\gamma,2}(\psi, \psi) - \mathbf{W}_3(w^N; \psi, \psi) + \mathbf{W}_4(\psi, \psi) \right] \leq c_9 \left(\left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) + \\
 &+ c_{10} \left(\left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}], \quad (33)
 \end{aligned}$$

де константи c_9, c_{10} залежать від $r_0, r_1, c_T, \rho_{zp}, M_1, M_2, \bar{N}_1, N_2, R_1^1, R_2^1, R_3^1, c_i, i = \overline{1,8}$.

Для додатно-визначених форм справедливi наступнi співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &\geq \rho_{sp} r_0 \left(\left\| \frac{\partial \psi_3}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_4}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \\ \mathbf{W}_1(w^N; \psi, \psi) &\geq c_{11} \left(\|\psi_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right), \\ \mathbf{W}_2(\psi, \psi) &\geq c_{12} \left(\|\psi_3\|_{W_1^2(\Omega)}^2 + \|\psi_4\|_{W_1^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned} \quad (34)$$

де $c_{11} = r_0 \min\{\bar{K}, \lambda_T\}$, $c_{12} = \min\{r_0, \frac{1}{r_1}\} c_{12}(\lambda, \mu)$.

Із оцінки (33) з урахуванням (34) та застосуванням формули Гріна до оцінки інтегралів по γ , отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial l}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \|l\|_{L_\infty(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} \leq \\ &\leq c_{13} \left(\left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \|\eta\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Для оцінок норм η , $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ будемо використовувати уже відомі результати [3, с. 768]:

$$\|\eta\|_{L_2(\Omega)}(t) \leq S_1 s^{k+1} \|w\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t), \quad \|\eta\|_{H_0^1(\Omega)}(t) \leq S_2 s^k \|w\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t), \quad (36)$$

де S_1, S_2 – деякі константи, залежні від c_{11}, c_{12} і незалежні від w, s .

Оцінки норм $\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, \cdot)$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(x, \cdot)$ в просторах $L_2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ аналогічні оцінкам (36).

Таким чином, існує константа C , залежна від норм $\|w\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w'_t\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w''_{tt}\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^{k+1}(\Omega))}$, така що

$$\left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} + \|\eta\|_{L_2(0, \tilde{T}; W_2^1(\Omega))} \leq C s^k. \quad (37)$$

Із нерівностей (35), (37) випливає оцінка (21).

Теорема доведена.

Висновок. Запропоновано алгоритм побудови наближеного узагальненого розв'язку осесиметричної початково-крайової задачі для системи рівнянь фільтрації, теплоперенесення та пружної деформації із змішаними неоднорідними крайовими умовами та умовами спряження. Отримано оцінки швидкості збіжності неперервного за часом наближеного розв'язку, побудованого на базі методу скінченних елементів.

Література

1. Марченко О.А., Лежнина Н.А. Приближенное решение методом конечных элементов задачи влаготеплопереноса в промерзающих грунтах. *Компьютерная математика*. 2002. № 1. С. 24-33.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Расчет задач с разрывными решениями. Киев: Наукова думка, 1995. 262 с.
3. Marchenko O.O., Samoilenko T.A. Analyzing an approximate solution to a quasilinear parabolic-hyperbolic problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. (48). P. 762-773.
4. Марченко О.О., Самойленко Т.А. Побудова наближеного розв'язку осесиметричної задачі динаміки неізотермічного вологопереносу. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2020. № 1. С. 41-52.