

Математика

УДК І.1 01.01.06

Ткаченко Іван Семенович

доктор економічних наук, професор

Хмельницький національний університет

Tkachenko Ivan

Doctor of Economic Sciences, Professor

Khmelnytskyi National University

СІРАКУЗЬКІ ПОСЛІДОВНОСТІ: ПРЯМОГО ТА ЗВОРОТНОГО СПРЯМУВАННЯ

SYRACUSE SEQUENCES: FORWARD AND REVERSE DIRECTION

Анотація. *Визначено за яких умов в сіракузьських послідовностях $S\{N\}$ з їх необмеженою кількістю можлива реалізація алгоритмів прямого та зворотного формування, а також показано що вони здійснюються за принципом послідовного вкладного елементу й мають розгалужену замкнутість від однієї до іншої тривіальної одиниці через конкретне задане натуральне число N .*

Ключові слова: *сіракузька послідовність, прямого та зворотного спрямування, тривіальна одиниця, розгалужені кінцівки, замкнутість.*

Summary. *It is determined under what conditions in Syracuse sequences $S\{N\}$ with their unlimited number it is possible to implement algorithms for their direct and inverse formation, and it is also shown that they are implemented according to the principle of a sequential embedded element and have branched closure from one trivial unit to another through a specific given natural number N .*

Key words: *Syracuse sequence, direct and inverse direction, trivial unit, branched extremities, closure.*

Вступ та постановка проблеми. Сіракузька проблема — одна з нерозв'язаних проблем математики[1], названа на честь німецького математика Лотара Коллатца, який запропонував її у 1937 році. Суть проблеми полягає у формуванні послідовності чисел [2] за визначеним алгоритмом, а саме:

- із множини натуральних чисел довільним чином обираємо певне число N ; якщо воно парне, то ділимо його на 2, а якщо непарне, то множимо на 3 і додаємо 1 (одиницю) і воно стає парним, знову ділимо на два, та й знову може бути парним, то ділимо на два, а непарне, множимо на три й додаємо одиницю; тобто таким чином **покроково** обчислюються значення кожного наступного елементу послідовності $S\{N\}$, або маємо реалізацію відомої гіпотези $3N + 1$;

- процес її формування в цьому випадку буде завершеним через те, що коли передостанній елемент $N = 2$ (парний) то відбувається ділення парного числа на два, тобто отримуємо фактичне значення для припинення процесу формування послідовності $S\{N\}$, бо завжди є здійсненням співвідношення для будь якого випадку коли $a = a$ і тоді маємо $\frac{a}{a} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \equiv 1$, та цей факт назвемо **тривіальна одиниця**, а це і є ключовий момент алгоритму що відповідає головній умові гіпотези Л. Коллатца: *яке б початкове число не було взято, рано чи пізно ми отримаємо одиницю*, а про яку саме одиницю йде мова доведено автором в роботі [3].

Розв'язання проблеми. В даному дослідженні пропонуємо сіракузьку послідовність сформовану за алгоритмом $3N + 1$ називати її **прямого спрямування**, а якщо перенумерувати її елементи в зворотному порядку, інакше кажучи, почати нумерацію послідовності з останнього елемента (тривіальної

одиниці) до першого, тобто до N , то це буде послідовність **зворотного спрямування**, а якщо ще з її останнього елемента N зробимо початок продовження послідовності сформованої за **алгоритмом зворотного напрямку** за умов що виконується одна із чотирьох можливих ситуацій або $(N - 1)$, чи $(N - 2)$, або $(2N - 1)$, чи $(2N + 1)$ ділиться на **три**, тобто це те, що визначає послідовність як **замкнуту**,

Алгоритм зворотного напрямку. це процес формування послідовності, який здійснюється за наступним порядком дій: число N має те саме значення що й в першому випадку(прямого спрямування), але тепер діятиме уже таке правило: у випадку коли число N не ділиться на три, то виникає одна із чотирьох можливих ситуацій або $(N - 1)$, чи $(N - 2)$, або $(2N - 1)$, чи $(2N + 1)$ ділиться на **три**, далі знову можлива така сама ситуація що існує вибір однієї з них, а можливо що по черзі кожної з них, та продовжуємо й далі поки не отримаємо останній елемент, який дорівнює тривіальній одиниці, будемо називати **алгоритмом зворотного напрямку**.

Розглянемо декілька прикладів формування сіракузьких послідовностей.

При $N = \hat{1}$, є **натуральне число**, виконаємо арифметичні дії за алгоритмом прямого напрямку $((3 \cdot \hat{1} + 1) \div 2) \div 2 \equiv 1$ та отримаємо сіракузьку послідовність прямого спрямування $S(\hat{1})_{\rightarrow} : \{ \hat{1}, 4, 2, 1 \}$, де останнім елементом буде вже **тривіальна** одиниця, як результат виконаної дії ділення числа самого на себе. Це означає що одиниця на початку послідовності не та сама що одиниця в її кінці. Доречно пригадати що одиниця за її означенням не є **простим** числом та варто пам'ятати також і про те що будь яке число нульової степені є також **тривіальна** одиниця: $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \equiv 1$. Далі виконаємо дії зворотного напрямку за варіантом $(2N + 1)$: $(2 \cdot \hat{1} + 1) \div 3 \equiv 1$; та отримаємо сіракузьку послідовність зворотнього спрямування $S(\hat{1})_{\leftarrow} : \{ \hat{1}, 3, 1 \}$, де знову

початковий елемент це одиниця як натуральне число і тривіальна одиниця є останній елемент, а також створимо замкнуту сіракузьку послідовність для $N = \hat{1}$, зробивши переорієнтацію елементів в $S(\hat{1})_{\rightarrow} : \{ \hat{1}, 4, 2, 1 \}$, на $\underline{S}_{\leftarrow}(\hat{1}) : \{ 1, 2, 4, \hat{1} \} \sim \{ \underline{S}_{\leftarrow}(4), \hat{1} \}$, отримаємо замкнуту послідовність $S_{\leftrightarrow}(\hat{1}) : \{ 1, 2, 4, \hat{1}, 3, 1 \} \sim \{ \underline{S}_{\leftarrow}(4), \hat{1}, 3, 1 \}$. В даному випадку одиниця на початку і в кінці послідовності є тривіальна одиниця, а в середині є як натуральне число.

При $N = 2$ має бути одна дії: $(2 \div 2) \equiv 1$ і *тепер* маємо в прямому напрямку $S_{\rightarrow}(2) : \{ 2, 1 \}$, а коли перенумерували буде $\underline{S}_{\rightarrow}(2) : \{ 1, 2 \}$, та в зворотньому спрямуванні отримаємо для варіанту $(2N - 1) : (2 \cdot 2 - 1) \div 3 \equiv 1$ і відповідно маємо $S_{\leftarrow}(2) : \{ 2, 3, 1 \}$ та замкнуту послідовність: $S_{\leftrightarrow}(2) : \{ 1, 2, 3, 1 \}$.

$$\text{При } N = 3 \text{ маємо } \left(\left(\left(\left(\left((3 \cdot 3 + 1) \div 2 \right) \cdot 3 + 1 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \equiv$$

1.

$S_{\rightarrow}(3) : \{ 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 \}$; а переорієтована послідовність відповідно буде $\underline{S}_{\rightarrow}(3) : \{ 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 3 \} \sim \{ \underline{S}_{\rightarrow}(10), 3 \}$, а це той випадок коли $N = 3$ і ділиться на 3, тобто $(3 \div 3) \equiv 1$; зворотна послідовність має два елементи $S_{\leftarrow}(3) : \{ 3, 1 \}$; відповідно замкнута буде така: $S_{\leftrightarrow}(3) : \{ 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 3, 1 \}$, або ще й матиме такий вигляд: $S_{\leftrightarrow}(3) : \{ \underline{S}_{\rightarrow}(10), 3, 1 \}$.

При $N = 4$ відповідно прямий напрямок $(4 \div 2) \div 2 \equiv 1$ й $S_{\rightarrow} : \{ 4, 2, 1 \}$ і переорієтований $\underline{S}_{\rightarrow}(4) : \{ 1, 2, 4 \}$, а зворотній напрямок за варіантом $(N - 1)$ буде таким $(4 - 1) \div 3 \equiv 1$; а послідовності відповідно: зворотна $S_{\leftarrow}(4) : \{ 4, 3, 1 \}$ та замкнута $S_{\leftrightarrow}(4) : \{ 1, 2, 4, 3, 1 \}$; а за варіантом $(2N + 1)$ маємо $((2 \cdot 4 + 1) \div 3) \div 3 \equiv 1$, $S_{\rightarrow}(4) : \{ 4, 9, 3, 1 \}$, а далі буде зворотна $S_{\leftarrow}(4) : \{ 1, 3, 9, 4 \}$ і замкнута $S_{\leftrightarrow}(4) : \{ 1, 2, 4, 9, 3, 1 \}$.

При $N = 5$ прямий напрямок $\left(\left(\left(\left((5 \cdot 3 + 1) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \equiv 1$ дає послідовність $S_{\rightarrow}(5): \{ 5, 16, 8, 4, 2, 1 \} \sim \{ 5, S_{\rightarrow}(16) \}$, фактично є частиною прямого напрямку для варіанта з числом $N = 3$, а зворотний дає три варіанти. Перший $(2N - 1): (2 \cdot 5 - 1) \div 3 \div 3 \equiv 1$ і послідовність $S_{\leftarrow}(5): \{ 5, 9, 3, 1 \}$, а другий $(N + 1): ((5 + 1) \div 3) + 1 \div 3 \equiv 1$ та маємо $S_{\leftarrow}(5): \{ 5, 6, 2, 3, 1 \}$ і третій $(N - 2): (5 - 2) \div 3 \equiv 1$ відповідно $S_{\leftarrow}(5): \{ 5, 3, 1 \}$, а й замкнутих разом з переорієнтованою $\underline{S}_{\rightarrow}(5): \{ 1, 2, 4, 7, 16, 5 \} \sim \{ \underline{S}_{\rightarrow}(16), 5 \}$ буде три не однакових $S_{\leftrightarrow}(5): \{ \underline{S}_{\rightarrow}(16), 5, 9, 3, 1 \}$, $S_{\leftrightarrow}(5): \{ \underline{S}_{\rightarrow}(16), 5, 6, 2, 3, 1 \}$, $S_{\leftrightarrow}(5): \{ \underline{S}_{\rightarrow}(16), 5, 3, 1 \}$

Цей приклад наочно підкреслює що сірокузьких послідовностей може бути не одна, а декілька для одного й того самого числа N та побудувати їх можна в залежності від потреб ситуації чи конкретного цільового спрямування дослідника. Впровадження дужок при виконанні арифметичних операцій, формуючих послідовності, засвідчує про те, що процес цей відповідає процедурі обчислення вкладених елементів числової послідовності, а через це **сіракузька послідовність за алгоритмами її формування є вкладеною послідовністю**. Переконаємося ще й на прикладі формування сірокузької послідовності для $N = 6$.

При $N_1 = 6$; виконуємо кожну окрему арифметичну операцію за алгоритмом Л. Коллатца для визначення значення наступного елементу;

$$N_2 = 6 \div 2 = 3; N_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10; N_4 = 10 \div 2 = 5; N_5 = 5 \cdot 3 + 1 = 16; N_6 = 16 \div 2 = 8; N_7 = 8 \div 2 = 4; N_8 = 4 \div 2 = 2;$$

$N_9 = 2 \div 2 \equiv 1$; а вкладеність процедури обчислення елементів сіракузької послідовності онаочнюють собою дужки;

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left((6 \div 2) \cdot 3 + 1 \right) \div 2 \right) \cdot 3 + 1 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \div 2 \right) \equiv$$

$1; S_{\rightarrow}(6): \{6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$, а також про вкладеність свідчить частина елементів яка відповідає вже сіракузькій послідовності інших чисел, зокрема:

$S_{\rightarrow}(6): \{6, 3, 10, S_{\rightarrow}(5)\}$ або $S_{\rightarrow}(6): \{6, S_{\rightarrow}(3)\}$ це також стосується й при реалізації й за іншим алгоритмом $(2N - 1)$ дійсно маємо $N_1 = 6$; $N_2 = 6 \div 3 = 2$; $N_3 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $N_4 = 3 \div 3 \equiv 1$, а реалізація алгоритму в дужках матиме наступний вигляд: $((6 \div 3) \cdot 2 - 1) \div 3 \equiv 1$ й тоді маємо $S_{\leftarrow}(6): \{6, 2, 3, 1\}$, а далі, враховуючи що маємо переорієнтовану в зворотному напрямку $\underline{S}_{\rightarrow}(6): \{1, 2, 4, 7, 16, 5, 10, 3, 6\}$, або $\underline{S}_{\rightarrow}(6): \{\underline{S}_{\rightarrow}(3), 6\}$ то вже наступна замкнута послідовність буде такою $S_{\leftrightarrow}(6): \{1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 3, 6, 2, 3, 1\}$, $S_{\leftrightarrow}(6): \{\underline{S}_{\rightarrow}(5), 10, 3, 6, S_{\leftarrow}(2)\}$ або $S_{\leftrightarrow}(6): \{\underline{S}_{\rightarrow}(3), 6, S_{\leftarrow}(2)\}$.

Впевненості в дієвості алгоритму формування вкладеної послідовності надає також й наступний приклад, реалізуємо алгоритм формування послідовності $S\{N\}$ починаючи з числа $N_1 = 7$:

$$N_2 = (3 \cdot 7 + 1) = 22; N_3 = 22 \div 2 = 11; N_4 = (11 \cdot 3 + 1) = 34; N_5 = 34 \div 2 = 17;$$

$$..., N_{14} = 16 \div 2 = 8; N_{15} = 8 \div 2 = 4; N_{16} = 4 \div 2 = 2; N_{17} = 2 \div 2 = 1;$$

цей елемент послідовності в ній є останнім і маємо сіракузьку послідовність $S_{\rightarrow}(7): \{7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$ дійсно сформовано за алгоритмом вкладного елемента. Якщо виконати з елементами цієї числової послідовності арифметичні операції з використанням дужок в зворотньому напрямку, то отримаємо вихідне (перше) число N послідовності $S_{\leftarrow}(N)$, а

продовжуючи далі за алгоритмом зворотного напрямку визначені в дужках дії $(((((2 \cdot 7) \cdot 2) - 1) \div 3) \div 3) \div 3 \equiv 1$, і зворотна послідовність

$S_{\leftarrow}(7): \{7, 14, 27, 9, 3, 1\}$ ще й інші можуть бути варіанти виконання дій в дужках $((((7 - 1) \div 3) + 1) \div 3 \equiv 1$, та отримаємо відповідну послідовність $S_{\leftarrow}(7): \{7, 6, 2, 3, 1\}$; а може бути такий варіант $((((7 \cdot 2 - 2) \div 3) - 1) \div 3 \equiv 1$ і має вид $S_{\leftarrow}(7): \{7, 12, 4, 3, 1\}$, а отже, приєднуючи їх по черзі до переорієнтованої послідовності $\underline{S}_{\leftarrow}(7)$:

$\{1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 40, 13, 26, 52, 17, 34, 11, 22, 7\}$; або $\underline{S}_{\leftarrow}(7): \{\underline{S}_{\leftarrow}(22), 7\}$ матимемо відповідні замкнені послідовності для числа $N_I = 7$

$$S_{\leftrightarrow}(7): \{\underline{S}_{\leftarrow}(22), 7, 14, 27, 9, 3, 1\}; S_{\leftrightarrow}(7): \{\underline{S}_{\leftarrow}(22), 7, 6, 2, 3, 1\};$$

$$S_{\leftrightarrow}(7): \{\underline{S}_{\leftarrow}(22), 7, 12, 4, 3, 1\}.$$

Сіракузькі послідовності для кожного окремого числа N мають як початковий елемент, який відповідає значенню N , так і кінцевий, що завжди дорівнює тривіальній одиниці. Кількість елементів у послідовності для кожного N своя.

Для кожної послідовності прямого спрямування в переорієнтовану вигляді можуть існувати *розгалужені кінцівки* за зворотними напрямками. В даному прикладі маємо трийкову розгалуженість, починаючи з елемента що відповідає початковому числу $N = 7$.

При $N = 16$, за алгоритм $3N + 1$ маємо випадок коли всі елементи діляться на два $\left(\left(\left((16 \div 2) \div 2\right) \div 2\right) \div 2\right) \equiv 1$, сіракузьку послідовність

$S_{\rightarrow}(16): \{16, 8, 4, 2, 1\}$ та її переорієнтовний варіант $\underline{S}_{\leftarrow}(16): \{1, 2, 4, 8, 16\}$, або $\underline{S}_{\leftarrow}(16): \{\underline{S}_{\leftarrow}(8), 16\}$, а за алгоритмом в зворотному напрямку коли маємо варіант при $(N - 1): (((((16 - 1) \div 3) \cdot 2 - 1) \div 3) \div 3) \equiv 1$; відповідно отримуємо сіракузьку послідовність $S_{\leftarrow}(16): \{16, 5, 9, 3, 1\}$ в зворотному напрямку у якої співпадають тільки перші та останні елементи з п'яти. Можливі й інші варіанти послідовностей у зворотному напрямку,

зокрема, може бути використаний комбінований підхід з вибором покроково можливих ситуацій $(2N + 1), (2N - 1), (N - 1), (N + 1)$ до визначення значення її елементів аби він ділився на три $(2N + 1), (2N - 1), (N - 1), (N + 1)$, в цьому випадку і є саме той варіант формування зазначеної послідовності:

$(((((((((16 \cdot 2 + 1) \div 3) \cdot 2 - 1) \div 3) - 1) \div 3) + 1) \div 3) \equiv 1$ і маємо:

$S_{\leftarrow}(16): \{16, 33, 11, 21, 6, 2, 3, 1\} \sim \{16, S_{\leftarrow}(33)\}$, а замкнута послідовність буде така: $S_{\leftrightarrow}(16): \{S_{\leftarrow}(8), 16, 33, 11, 21, 6, 2, 3, 1\}$. В цьому прикладі маємо випадок роздвоєності у замкненій послідовності $S_{\leftrightarrow}$,

$S_{\leftrightarrow}(16): \{S_{\leftarrow}(8), 16, S_{\leftarrow}(5)\}$ та $S_{\leftrightarrow}(16): \{S_{\leftarrow}(8), 16, S_{\leftarrow}(33)\}$.

Розглянуті приклади вже дають підстави зробити певні висновки, але цікаві можуть бути ще моменти при формуванні послідовностей зі значною кількістю її елементів, бо з'являються нові елементи, які дозволяють збільшити діапазон кінцівок у зворотному напрямку формування замкненої сіракузької послідовності, але цей процес дасть більший ефект при його комп'ютерній реалізації.

Висновки.

1. Одиниця як творець натуральних чисел і одиниця як результат арифметичної дії мають принципово різні ролі в теорії чисел як в цілому так і особливо при розв'язанні проблеми сіракузької послідовності про що й свідчать результати даного дослідження.

2. Сіракузька послідовність за алгоритмами та напрямками й принципом її формування є вкладеною замкненою послідовністю для кожного натурального числа N . Необмеженість натуральних чисел породжує ще більшої необмеженості сіракузьких послідовностей принаймні прямого та зворотного напрямків, а поява **тривіальної одиниці** як останнього її елементу, свідчить і про справедливість висновку Л. Коллатца при формулюванні своєї гіпотези.

3. Алгоритм формування сіракузької послідовності реалізує також і завершений процес перекомплектування N комплектів по три об'єкти в кожному на комплекти по два таких об'єкти в кожному новому комплекту але вже по два з усіма його особливостями.

Література

1. Stewart I. The Great Mathematical Problems Paperback. 7 Mart 2013. 340 р.
2. Гіпотеза Коллатца. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%96%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B0_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%82%D1%86%D0%B03 (дата звернення: 01.02.2025).
3. Ткаченко І. С. Гіпотеза Л. Коллатца: софізм, парадокс, розв'язання. *Міжнародний науковий журнал "Інтернаука"*. 2024. № 3. <https://doi.org/10.25313/2520-2057-2024-3-9725>.