

Фізико-математичні науки

УДК 519.86(075.8)

Селезньова Надія Петрівна

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Seleznova Nadiia

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of
Mathematical Physics and Differential Equations
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute»*

Рудик Тетяна Олександрівна

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Rudyk Tetiana

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of
Mathematical Physics and Differential Equations
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute»*

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОЛЕКТИВНИХ ПЕРЕВАГ ЕЛЕКТОРАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

METHODS OF DETERMINING COLLECTIVE ADVANTAGES OF ELECTORAL RESEARCH

Анотація. В роботі колективні переваги розглядаються в контексті електоральних переваг виборців в процесі голосування за певні політичні партії до Верховної Ради. Було проведено опитування певного прошарку виборців, а саме студентів різних курсів одного із навчальних закладів Києва напередодні виборів до Верховної Ради. На прикладі зібраних емпіричних даних показано, як на практиці можна формувати профілі переваг виборців застосовуючи первинну обробку статистичних даних. У підсумку побудовано функцію переваг на основі таких середніх показників як середнє значення, мода, медіана.

Ключові слова: електоральне дослідження, функція переваг, мода, медіана, коефіцієнт варіації.

Summary. In the work, collective preferences are considered in the context of electoral preferences of voters in the process of voting for certain political parties to the Verkhovna Rada. A survey of a certain stratum of voters, namely students of various courses of one of Kyiv's educational institutions, was conducted on the eve of the elections to the Verkhovna Rada. On the example of collected empirical data, it is shown how in practice it is possible to form profiles of voter preferences using the primary processing of statistical data. As a result, a preference function was built based on such average indicators as the mean value, mode, median.

Key words: electoral research, preference function, mode, median, coefficient of variation.

Кожного дня перед нами постає проблема вибору. Поставимо загальну задачу: нехай n акціонерів деякої фірми визначають систему

пріоритетів фінансування m програм. У кожного акціонера є своя думка з приводу впорядкування статей витрат. Необхідно побудувати їх впорядкування, яке б відображало думку акціонерів у цілому. Між впорядкуванням програм і впорядкуванням кандидатів на виборах нема жодної різниці з математичної точки зору. Отже, для зручності будемо говорити про виборців та кандидатів замість акціонерів та програм. Тоді маємо n виборців та m кандидатів. Потрібно побудувати функцію, що визначає колективний порядок на множині кандидатів, тобто правило, яке для будь-яких заданих порядків (кожен виборець певним чином впорядковує кандидатів, наприклад, кращі та гірші кандидати) визначає колективний порядок (наприклад, шляхом голосування, за правилом абсолютної більшості, визначено найкращого та найгіршого кандидата).

Вважаємо, що існують три можливості при парних порівняннях кандидатів, скажімо a і b : $a \overset{s}{>} b$ (a кращий за b), $a \overset{s}{=} b$ (a і b однакові), $a \overset{s}{<} b$ (a гірше за b), та їх комбінації типу $a \overset{s}{\geq} b$ (a не гірше за b).

Отже, будується функція, що визначає колективний порядок на множині кандидатів, тобто правило, яке для будь-яких заданих порядків

$\succ^1, \dots, \succ^n$ визначає колективний порядок $\overset{s}{\succ}$:

$$\overset{s}{\geq} = f(\overset{1}{\succ}, \dots, \overset{n}{\succ}).$$

Розглянемо загальні принципи побудови функції переваг. Таких функцій може існувати багато. Наприклад, функція f може визначати всіх кандидатів рівними. Тому необхідно накласти на f певні обмеження. Перш за все f має бути визначена для довільного (скінченного) числа кандидатів. Наприклад, для двох кандидатів всі перелічені правила голосування співпадають, тому функція f в цьому випадку будується легко: або хтось із двох кандидатів виграє і, отже, займає перше місце (а суперник – друге), або

виявляється, що вони рівні. Наприклад, для профілю 1 дані наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Профіль голосування 1

Виборець	1	2	3	4	5	6
Кандидати	a	a	b	a	b	a
	b	b	a	b	a	b

Еквівалентно профілю 2 маємо дані у табл. 2.

Таблиця 2

Профіль голосування 2

Група виборців	[1,2,4,6]	[3,5]
Кандидати	a b	b a

Звідки маємо $a \succ^s b$ за будь – яким з правил голосування.

Отже, маємо $a \succ^s b$ за будь – яким з правил голосування. Для профіля 3 дані наведено у табл. 3.

Таблиця 3

Профіль голосування 3

Група виборців	[1,2,5]	[3,4,6]
Кандидати	a b	b a

Жодне з наших правил не дає переможців, тому слід вважати $a =^s b$. Але ці правила слід ще визначити для випадків, коли число кандидатів більше двох. Найпростіший спосіб полягає в наступному: нехай M – множина кандидатів, а p – правило виборів. Позначимо переможців (їх може бути декілька) символом $p(M)$. Вони займуть перше місце. Після чого виключаємо з M цих переможців, в результаті отримаємо нову множину

$M_1 = M \setminus p(M)$. Застосовуючи до неї правило p , отримаємо множину $p(M_1)$ переможців з M_1 , вони займуть друге місце. Виключивши з M_1 цих переможців, отримаємо множину $M_2 = M_1 \setminus p(M_1)$. В результаті отримаємо функцію f .

Розглянемо декілька прикладів. Нехай p – правило відносної більшості. Розглянемо профіль 4 ($n=3$, $M=[a,b,c,d]$, табл. 4).

Таблиця 4

Профіль голосування 4

Виборець	1	2	3
Кандидати	a	d	b
	b	a	c
	c	b	d
	d	c	a

Правило відносної більшості [1; 2; 3] дає по одному голосу для a , d , b , звідси $p(M)=\{a, b, d\}$. Вони займають перше місце, а кандидат c займає друге. Отже, f ставить у відповідність профілю 4 порядок: $a \stackrel{s}{=} b \stackrel{s}{=} d \succ c$.

Розглянемо цю ж функцію на профілі 5 (табл. 5). Маємо $p(A)=\{a\}$, $A_1 = \{b,c,d\}$, а відповідний профіль 5 (A_1) дає $p(A_1)=\{d\}$.

Таблиця 5

Профіль голосування 5

Кількість голосів	5	3	5	4
Кандидати	d	d	b	c
	c	b	c	d
	b	c	d	b

Для профілю 6 $A_2 = \{b,c\}$: дані наведено у табл. 6.

Таблиця 6

Профіль голосування 6

Кількість голосів	5	3	5	4
Кандидати	c	b	b	c
	b	c	c	b

Нарешті, з профіля 6 видно, що $p(A_2)=\{c\}$, тобто f задає порядок $a \succ^s d \succ^s c \succ^s b$.

Правило абсолютної більшості породжує свою функцію f , яка не є визначеною для всіх профілів (наприклад, для профілю 4). Як бачимо, побудова профілів голосування не є елементарною задачею. При великій кількості виборців вона суттєво ускладнюється. Отже, на основі результатів проведення певних електоральних досліджень, побудуємо профілі голосування. Ця задача є доволі заплутаною і складною при великій кількості виборців. Тому пропонується застосувати методи математичної статистики для побудови функції переваг. За допомогою цих методів побудуємо приклад функції колективної переваги. Емпіричні дані отримаємо шляхом опитування виборців з приводу майбутніх виборів до парламенту. На основі цього опитування складемо рейтингову таблицю. Для цього запропонуємо виборцю поставити оцінки восьми партіям за восьми – бальною шкалою, при цьому "1" – мінімальна оцінка (найгірша оцінка), "8" – максимальна (найкраща оцінка), 0 – виборець мало інформований про партію. Позначимо партії через $X_1, \dots, X_8$. Загалом опитано 65 респондентів – студентів НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Для кожної із партій побудовано рейтингові таблиці. В першому стовпці таблиці вказано бали, якими респонденти оцінили партії. В другому стовпці – кількість відповідних балів, які надали партіям виборці, в третьому стовпці наведено такі статистичні характеристики: $M(X)$ – середній бал, набраний відповідною партією, $D(X)$ – дисперсія, Sigma – середнє квадратичне відхилення, M_o – мода, M_e – медіана, Var – коефіцієнт варіації [4; 5; 6]. Таблиця 7 та діаграма (рис.1) демонструють обробку числових даних, наприклад, для партії X_1 . Аналогічні таблиці створено за результатами опитування для усіх інших партій.

Таблиця 7

Емпіричні дані для для X_1

Бали X_i	N_i кількість виборців	Точкові оцінки	
0	13	$M(x)=$	1.69
1	28	$D(x)=$	2.65
2	9	$Sigma=$	1.63
3	5	$Var=$	96.3%
4	4		
5	3		
6	3	$Mo=$	1
7	0	$Me=$	1
8	0		
Сума	65		

Отриману інформацію (рис. 1) відобразимо у вигляді кругової діаграми для партії X_1 .

З діаграми (рис.1) бачимо, що виборці поставили цій партії 43% одиниць, що свідчить про негативну оцінку її діяльності.

Надалі обчислимо такі точкові характеристики випадкової величини – кількості балів, набраних партіями.

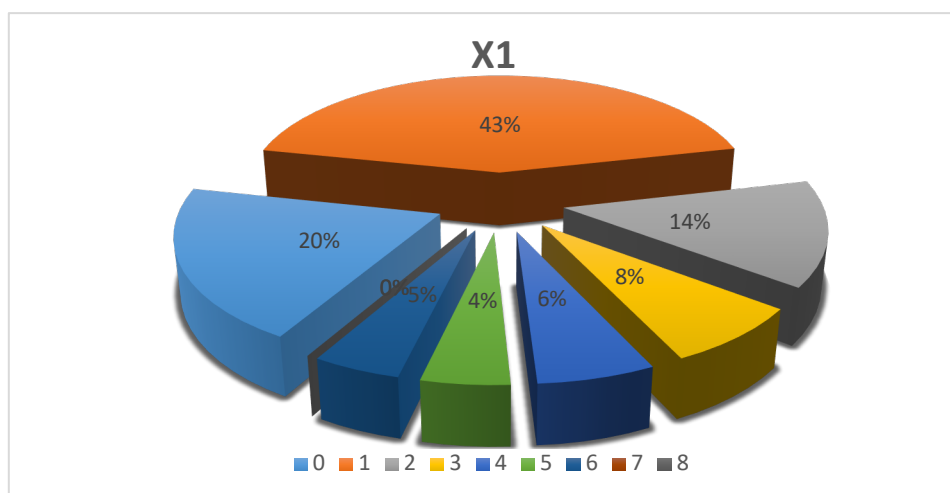


Рис. 1. Діаграма кількості балів у відсотках, отриманих від виборців партією X1

Середня величина $M(X)$ – це узагальнююча характеристика сукупності однотипних одиниць за певною кількісною ознакою. Вона характеризує типовий рівень варіативної ознаки і відображає те спільне, характерне, що об’єднує всю масу елементів, тобто статистичну сукупність.

Середньою величиною називають середнє арифметичне значення ознаки виборчої сукупності

$$M(X) = \frac{\sum x_i n_i}{n}.$$

У нашому контексті $M(X)$ означає середню кількість балів, набраних певною партією.

Водночас структуру цих сукупностей характеризують особливими показниками – структурними або порядковими середніми величинами. Зокрема, це мода та медіана.

Модю (M_o) називають варіанту, що найчастіше повторюється в даній сукупності.

Медіаною (M_e) в статистиці називають варіанту, що є серединою впорядкованого варіаційного ряду розподілу, тобто ділить його на 2 рівні частини: одна частина має значення варіативної ознаки менше ніж середня, а друга – більше.

Величини моди і медіани, як правило, відрізняються від величини середньої і співпадають з нею тільки у випадку симетрії варіаційного ряду. Це пояснюється тим, що на величину моди і медіани не впливають значення варіант, не характерних для даної сукупності, скажімо, надмірно малі чи надмірно великі. Середня величина не пояснює як групуються навколо неї окремі значення – чи лежать вони поблизу чи істотно відхиляються. Чим менші відхилення, тим однорідніша сукупність, а отже, тим більш надійні типові середні явища. Коливання окремих значень характеризують показники варіації, до яких відносяться дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

Дисперсією називають середню арифметичну квадратів відхилення варіантів від їх середньої арифметичної

$$D(X) = \frac{\sum (x_i - M(X))^2 n_i}{n}.$$

Середнє квадратичне відхилення є мірою надійності середньої. Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим об'єктивніше середня арифметична величина відображує всю сукупність. Обчислюється за формулою $\text{Sigma} = \sqrt{D(X)}$.

Коефіцієнтом варіації V називають відношення середнього квадратичного відхилення до середньої величини (визначають у відсотках):

$$\text{Var} = \frac{\text{Sigma}}{M(X)} * 100\%.$$

Цей показник характеризує однорідність сукупності, тобто надійність і типовість середньої величини. Розрізняють такі значення відносних коливань:

$V < 10\%$	незначне коливання;
$V = 10\% - 30\%$	середнє коливання;
$V > 30\%$	значне коливання.

Вважають, що сукупність є однорідною, а середня величина – типовою, коли коефіцієнт варіації не перевищує 33% [6; 7].

В таблиці 8 показано основні точкові характеристики розподілу набраних балів партіями, яких оцінювали виборці.

Таблиця 8

Точкові характеристики розподілу балів для усіх партій

	M(x)	Sigma(x)	Var, %	Mo	Me
X1	1.69	1.63	96.26	1	1
X2	1.62	1.38	85.25	1	1
X3	6.29	1.67	26.55	8	7
X4	3.17	2.04	64.44	1	3
X5	5.57	2.15	38.57	8	6
X6	3.51	2.05	58.56	5	4
X7	3.32	2.58	77.78	0	3
X8	3.12	2.14	68.68	4	3

Як бачимо з таблиці 8, тільки одна партія X3 має коефіцієнт варіації менший за 33%. Отже, набравши найвищий середній бал та моду 8 балів і медіану 7 балів, ця партія найімовірніше виграє вибори.

Якщо будувати функцію переваг на основі середнього показника набраних балів партіями ($M(X)$), то найвищою оцінкою є 6,29 балів у партії X3, а найнижчу оцінку отримала партія X2 – 1,62. Відобразимо отриманий результат ранжування партій на основі отриманих в середньому балів на наступній діаграмі (рис. 2).

На основі цієї діаграми маємо таку функцію переваг для партій:

$$X3 \succ X5 \succ X6 \succ X7 \succ X4 \succ X8 \succ X1 \succ X2.$$

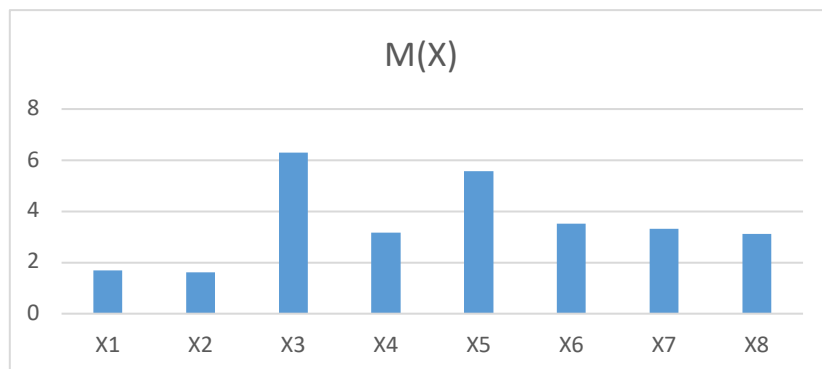


Рис. 2. Діаграма ранжування партій на основі середнього значення

Функцію переваг також можна побудувати спираючись або на моди, або на медіани. Тоді вона буде дещо відрізнятися від побудованої функції на основі середнього балу (рис. 3).

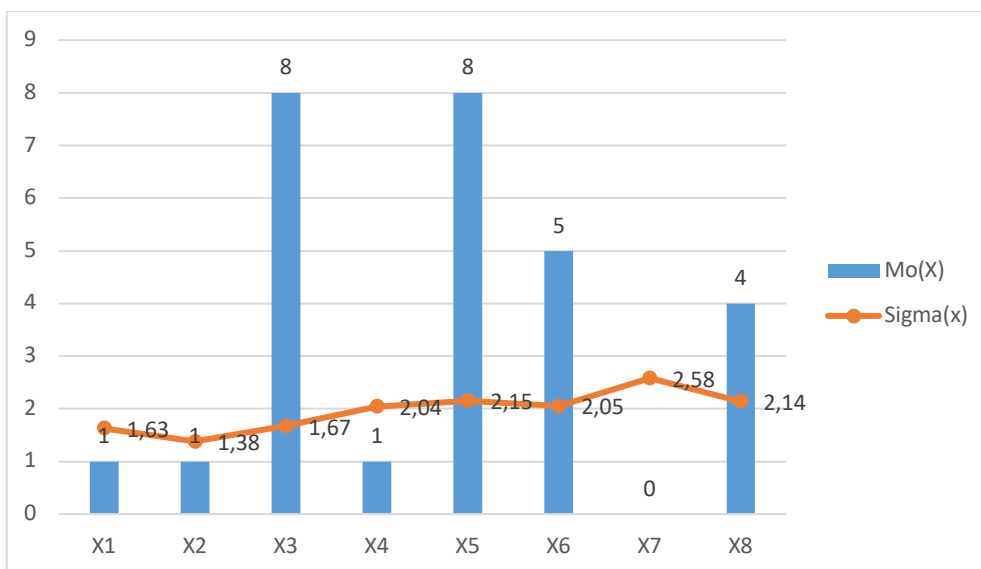


Рис. 3. Діаграма ранжування партій на основі моди та середнього квадратичного відхилення

Із цієї діаграми маємо дещо іншу функцію переваг, яка відрізняється від функції переваг, отриманої на основі середніх значень.

$$X3 = X5 \succ X6 \succ X8 \succ X4 = X1 = X2 \succ X7.$$

Як бачимо, результати пріоритетності партій серед виборців досить суттєво змінились в залежності від того, який середній показник ми застосовуємо.

Розглянемо діаграму ранжування партій на основі моди у порівнянні з коефіцієнтом варіації (рис. 4).

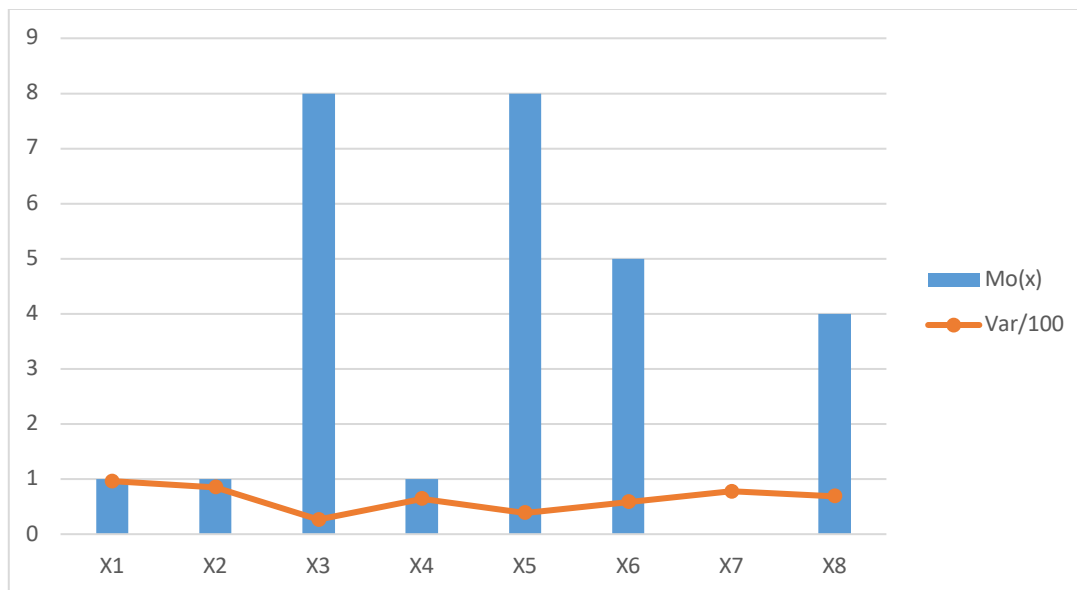


Рис. 4. Діаграма ранжування партій на основі моди та коефіцієнт варіації

З діаграми (рис. 4) можна зробити висновок, що найбільш стійким є результат у виборчих перегонах отримала партія X3, а партія X5, хоча має таку ж моду як X3, має менш стійкий результат.

Серед партій X1, X2, X4, які також мають однакові моди, найбільш стійкий результат має партія X4. Серед усіх представлених партій найбільш нестійкий результат має партія X1, тобто виборці ще коливаються у своїх перевагах відносно цієї партії.

Порівняти величини середнього значення балів та відповідних мод і медіан можна, користуючись діаграмою (рис. 5).

Висновки. При побудові функції переваг слід зважати на додаткові показники, такі як коефіцієнт варіації та середнє квадратичне відхилення. При однакових значеннях моди їх величина відрізняється.

Представлена інформація, в цілому, може допомогти аналітикам більш точно прогнозувати результати виборів і певним чином впливати на ці результати, провівши проміжні дослідження.

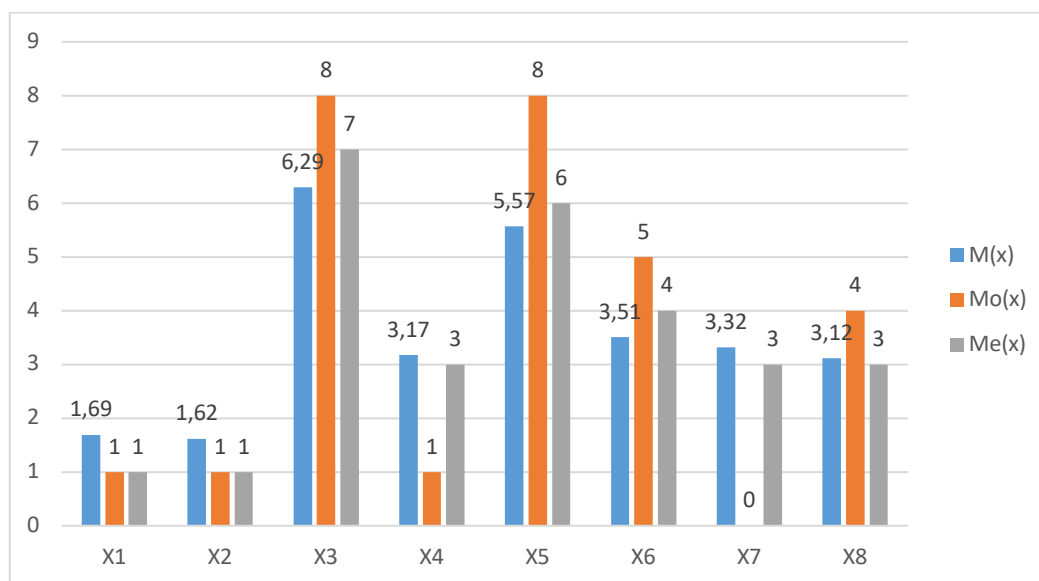


Рис. 5. Зведена діаграма ранжування партій на основі середнього значення, моди та медіани

Література

1. Morris H. DeGroot. Optimal statistical decisions. McGraw-Hill Book Co., New York, 1970. 491 p.
2. Arrow K. Social Choice and Individual Values. Yale University Press, 1951. 124 p.
3. Dummett M. The Borda count and agenda manipulation. *Social Choice and Welfare*. 1998. Vol. 15(2). P. 289-296.
4. Селезньова Н.П., Рудик Т.О. Математичне моделювання моніторингу якості освіти. Development trends in pedagogical and psychological sciences: the experience of countries of eastern Europe and prospects of Ukraine monograph. Edited by authors. 2nd ed. Riga, Latvia: "Baltija Publishing", 2018. P. 298–317.
5. Селезньова Н.П., Бондаренко М.А. Динамічна кореляційна модель електоратних уподобань виборців на прикладі виборів 2010 року. *Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний*

інститут". Політологія, соціологія, право. Київ: «Політехніка», 2010. № 4(8). С. 36–41.

6. Спеціальні питання вищої математики. Елементи теорії ймовірностей. Теорія і практикум: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.П. Селезньова та інш. КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл: 0,97 Мбайт). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 78 с.

7. Селезньова Н.П., Волохонська Ж.В. Деякі аспекти соціометрії суспільної думки на прикладі виборів президента України 2010 року. *Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. Політологія, соціологія, право. Київ «Політехніка», 2010. № 4(8). С.116–122.