

Technical sciences

UDC 681.586.2

Аллахверанов Рауф Юсіф огли

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри КІТАР

Харківський національний університет радіоелектроніки

Allakhveranov Rauf

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,

Kharkiv National University of Radio Electronics

Осман Аміра Ясирівна

магістрантка

Харківського національного університету радіоелектроніки

Osman Amira

Master Student of the

Kharkiv National University of Radio Electronics

Пашенко Олександр Сергійович

старший інженер-розробник

Компанія Softserve, Україна

Pashchenko Oleksandr

Senior Full-stack Engineer

Softserve Company, Ukraine

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕХАТРОННОЇ ТЕНЗОМЕТРИЧНОЇ
СИСТЕМИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАВАНТАЖЕНЬ
MATHEMATICAL MODEL OF A MECHATRONIC STRAIN GAUGE
SYSTEM FOR DETERMINING LOADS**

Анотація. Створено математичну модель мехатронної тензометричної системи для визначення навантажень, на основі поєднання рівнянь теорії пружності та лінійних електричних ланцюгів постійного струму; модель механічної компоненти – на основі поняття про коефіцієнт тензочутливості; модель електронної компоненти – на основі законів Кирхгофа.

Ключові слова: математична модель, мехатронна тензометрична система, тензорезистор, пружний стрижневий елемент, перетворювач сигналів, деформація, навантаження, вимірювання.

Summary. A mathematical model of a mechatronic strain gauge system for determining loads based on a combination of the equations of elasticity theory and linear DC electrical circuits was created; a model of the mechanical component based on the concept of the strain sensitivity coefficient; a model of the electronic component based on Kirchhoff's laws.

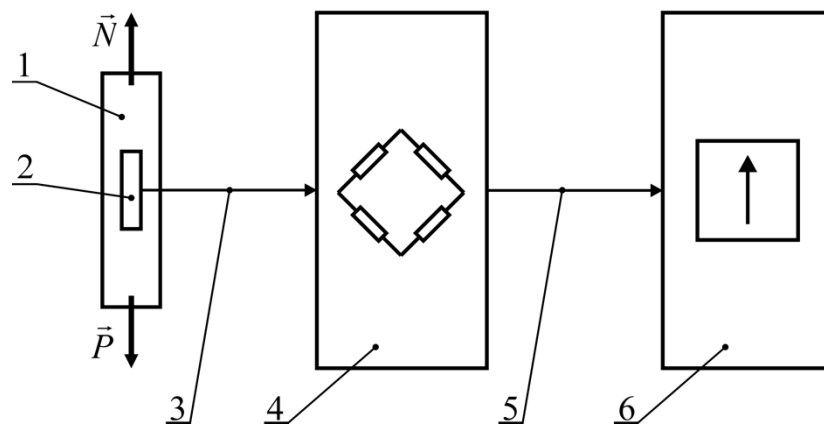
Key words: mathematical model, mechatronic strain gauge system, strain gauge, elastic rod element, signal converter, deformation, load, measurement.

Вступ. Математичне моделювання є актуальним достатньо тривалий час і в сьогоденні, а також широко використовується під час виконання наукових досліджень та розв'язування практичних завдань у різних галузях діяльності. Використання математичного моделювання дозволить виконати дослідження для перевірки можливих шляхів щодо удосконалення мехатронної тензометричної системи для визначення навантажень.

Загальна будова мехатронної тензометричної системи та необхідні відомості теорії пружності. Математична модель має відображати властивості досліджуваного об'єкта – мехатронної тензометричної системи для визначення навантажень, тому слід з'ясувати,

що представляє собою досліджуваний об'єкт, та надати основні теоретичні відомості щодо моделювання його складових [1-3].

У мехатронній тензометричній системі для визначення навантажень (рис. 1) деформація від зовнішнього навантаження пружного елемента (рис. 1, 1) передається до закріпленого на ньому тензорезистора (рис. 1, 2) і перетворюється на вимірюваний сигнал (рис. 1, 3), що відповідає зміні електричного активного опору тензорезистора. Далі вимірюваний сигнал подається на перетворювач (рис. 1, 4), який здійснює необхідні перетворення та видає сигнал вимірювання (рис. 1, 5), придатний для використання у вимірювальному приладі (рис. 1, 6).



1 – пружний елемент; 2 – тензорезистор; 3 – вимірюваний сигнал;

4 – перетворювач; 5 – результат вимірювання; 6 – вимірювальні прилади

Рис. 1. Загальна будова мехатронної тензометричної системи для вимірювання навантажень

Слід підкреслити, що в розглянутій тензометричній системі, пружний елемент є механічною компонентою, тензорезистор є електромеханічною компонентою, а перетворювач та вимірювальний прилад – є електронними компонентами. Стан електронних компонент у розглянутій тензометричній системі вимірювання навантажень визначається деформацією пружного елемента від зовнішнього навантаження, тобто залежить від стану механічної компоненти. Таким чином, розглянута тензометрична система

вимірювання зовнішніх навантажень є мехатронною системою, оскільки містить обов'язково притаманні таким системам механічну та електронну компоненти, котрі взаємодіють між собою за допомогою електромеханічної компоненти.

Зрозуміло, що характеристики окремих компонентів мехатронної тензометричної системи вимірювання навантажень мають бути, певним чином, узгодженими між собою, оскільки недосконалості будь-якої окремої компоненти будуть впливати на результати роботи всієї системи незалежно від характеристик інших компонентів. Далі умовно представляємо мехатронну систему у вигляді механічної частини, що містить пружний елемент та тензорезистор, а також електронної частини, що містить тензорезистор, перетворювач та вимірювальні прилади. Зрозуміло, що тензорезистор належить як до механічної частини, так і до електронної частини, оскільки саме через нього здійснюється зв'язок механічної частини з електронною.

Модель механічної компоненти мехатронної тензометричної системи. Механічна компонента мехатронної тензометричної системи для визначення навантажень складається із пружного елемента та закріпленого на ньому тензорезистора, що саме й вимірює деформацію цього пружного елемента.

Пружний елемент (див. рис. 1, 1) представляє прямолінійний однорідний стрижень довжиною L з однаковим уздовж довжини прямокутним перерізом із розмірами a та b . Один край пружного елемента є закріпленим, а інший – навантаженим деякою повздовжньою силою $\vec{N}(t)$, що залежить від часу t та приводить до деформації розтягування-стискання (рис. 2, а).

Для визначення деформування пружного елемента введемо уздовж його довжини вісь x та розглядатимемо переміщення перерізів (рис. 2, б),

деформацію та напруження (рис. 2, в) як функції координати $x \in [0, L]$ та часу $t \geq 0$:

$$u_x = u(x, t), \varepsilon_{xx} = \varepsilon(x, t), \sigma_{xx} = \sigma(x, t), \quad (1)$$

де u , ε та σ – переміщення, деформація та напруження уздовж довжини пружного стрижневого елемента.

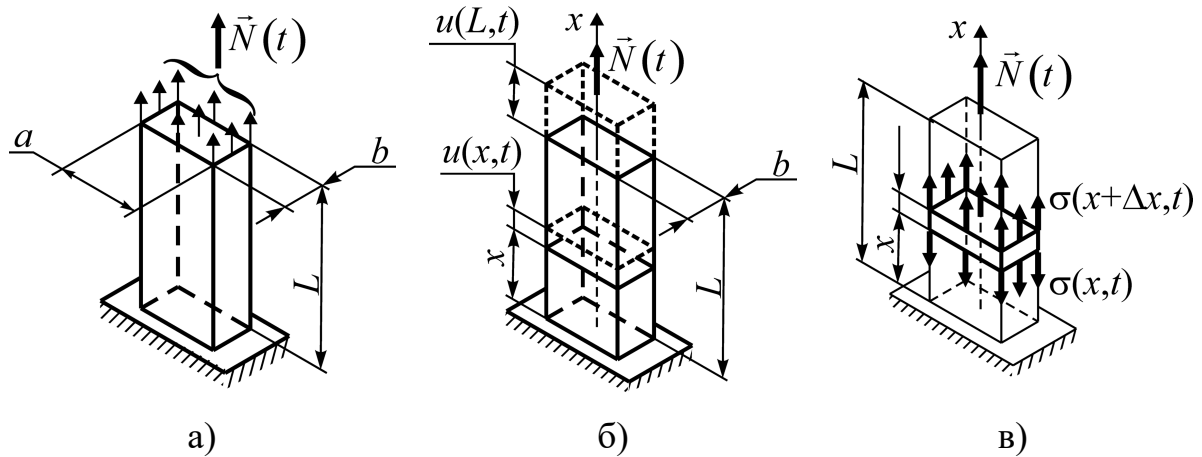


Рис. 2. Стрижневий пружний елемент (а), переміщення його перерізів (б) та напруження (в) в перерізах при деформуванні

У випадку малих деформацій та лінійно-пружного деформування параметри напружено-деформованого стану стрижня (рис. 2) мають задовольняти кінематичному рівнянню, рівнянню руху закону Гука:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\sigma = E\varepsilon, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Цілком зрозуміло, що рівняння, наведені у вигляді (2) – (4), є спрощенням відомих рівнянь лінійної теорії пружності [4; 5] щодо випадку розтягування-стискання стрижня та мають розглядатися із крайовими та початковими умовами. Отже, напружено-деформований стан пружного

стрижневого елементу (рис. 2) відповідає крайовим умовам такого вигляду:

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma(L, t) = \frac{N(t)}{A}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

де $A = ab$ – площа перерізу стрижневого пружного елемента, котра вважається сталою (див. рис. 2).

Початкові умови, що відповідають нерухомому недеформованому стану, мають наступний вигляд:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (6)$$

Замість трьох рівнянь (2) – (4) зазвичай розглядають одне рівняння відносно переміщення [4; 5]. Для цього за допомогою рівнянь (2) та (4) визначимо напруження наступним чином:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Завдяки співвідношенню (7) рівняння рівноваги (3) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (8)$$

де $c = \sqrt{E/\rho}$.

Крайові умови (5) з урахуванням співвідношення (7) запишуться наступним чином:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \frac{N(t)}{EA}, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Отже, визначення напружено-деформованого стану пружного стрижневого елемента зведено до розв'язування початково-крайової задачі для диференціального рівняння (9) з крайовими умовами (5) і початковими умовами (6).

Тензорезистор має бути закріплений на пружному елементі. Найкраще місце закріплення має відповідати максимальним переміщенням

пружного елемента, проте воно має забезпечити достатній простір для закріплення тензорезистора. Таким чином, у даному випадку маємо:

$$L/2 \leq x_d < L, \quad (10)$$

де x_d – координата точки закріплення тензорезистора.

Деформацію тензорезистора умовно визначимо наступними чином:

$$\varepsilon_d(t) \approx \frac{u(x_d, t)}{l}, \quad (11)$$

де l – база тензорезистора, тобто його довжина в недеформованому стані.

Залежність зміни активного електричного опору тензорезистора від деформації зазвичай представляють у вигляді [4; 5]:

$$\frac{\Delta R_d}{R_d} = S_A \varepsilon_d, \quad (12)$$

де ΔR_d – зміна опору тензодатчика внаслідок деформації;

R_d – опір тензорезистора при відсутності деформації;

S_A – коефіцієнт тензочутливості тензорезистора.

Завдяки виразу (12) маємо можливість визначити:

$$R'_d(t) = R_d (1 + S_A \varepsilon_d(t)), \quad (13)$$

де $R'_d(t)$ – залежність від часу активного опору тензорезистора.

Підставимо деформацію (11) до виразу (13) та одержимо залежність від часу активного опору тензорезистора, що встановлений на пружному стрижневому елементі у наступному вигляді:

$$R'_d(t) = R_d \left(1 + \frac{S_A}{l} u(x_d, t) \right). \quad (14)$$

Таким чином, у вигляді (14) маємо математичну модель тензорезистора, що встановлений на пружному стрижневому елементі.

Математичну модель механічної компоненти мехатронної тензометричної системи для вимірювання навантажень представлена у вигляді диференціального рівняння (8) із крайовими (9) та початковими

умовами (6), а також додатковим співвідношенням (14).

Диференціальне рівняння (8) із крайовими умовами (9) та початковими (6) визначає напружено-деформований стан пружного стрижневого елемента, що перебуває у стані розтягування/стискання під дією вимірюваного навантаження. Завдяки визначенню напружено-деформованого стану пружного елемента маємо можливість визначити переміщення закріпленого на ньому тензорезистора.

Співвідношення (14) дозволяє визначати активний опір тензорезистора у залежності від переміщення в точці його закріплення на пружному елементі.

Модель електронної компоненти мехатронної тензометричної системи. Електронна компонента мехатронної тензометричної системи для визначення навантажень представляє собою перетворювач сигналу зміни активного опору тензорезистора, закріпленого на пружному елементі, а також вимірювальні прилади та аналого-цифровий перетворювач й ЕОМ, які є завершеними незалежно від досліджуваної системи приладами. Далі розглядатимемо математичне моделювання перетворювача сигналу та математичне формулювання задачі динаміки деформованого твердого тіла щодо визначення навантаження за заданим переміщенням точки пружного елемента мехатронної тензометричної системи.

Для підключення тензорезистору обираємо широко розповсюджену мостову схему (рис. 3), оскільки вона забезпечує нульове напруження результуючого сигналу відповідне нульовій деформації [6; 7].

Відповідно до такої схеми (рис. 3) напруга $U_{дж}$ джерела живлення перетворюється на напругу $U_{вим}$ вимірювання за рахунок зміни активного опору $R'_д$ тензорезистора; щоб забезпечити нульове напруження $U_{вим}$ при нульовій деформації, коли $R'_д = R_д$, опори в мості (рис. 3) обирають однаковими:

$$R_1 = R_2. \quad (15)$$

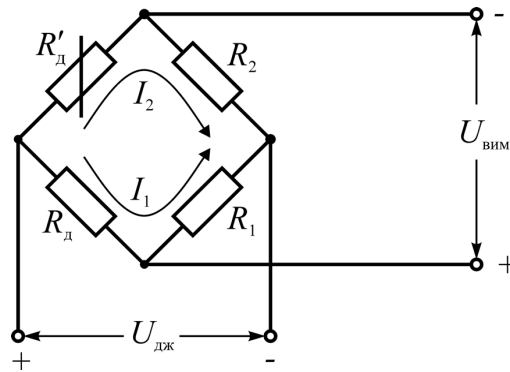


Рис. 3. Мостова схема підключення тензорезистора

Другий закон Кирхгофа (перший закон врахований при виборі струмів I_1 та I_2) [7] дозволяє записати для мостової схеми (рис. 3) два наступні співвідношення:

$$I_1(R_1 + R_d) = U_{дж}, \quad I_2(R_2 + R'_d) = U_{дж}, \quad (16)$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = U_{вим}. \quad (17)$$

За допомогою співвідношень (16) виключимо струми I_1 та I_2 із співвідношення (17):

$$\left(\frac{R_1}{R_1 + R_d} - \frac{R_2}{R_2 + R'_d} \right) U_{дж} = U_{вим}. \quad (18)$$

Здійснимо послідовні тотожні перетворення виразу (18):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_1 R_2 + R_1 R'_d - R_1 R_2 - R_2 R_d}{(R_1 + R_d)(R_2 + R'_d)} \right) U_{дж} = U_{вим}, \\ & (R_1 R'_d - R_2 R_d) U_{дж} = U_{вим} (R_1 + R_d)(R_2 + R'_d), \\ & (R_1 R'_d - R_2 R_d) U_{дж} = U_{вим} (R_2 (R_1 + R_d) + R'_d (R_1 + R_d)), \\ & R'_d (U_{дж} R_1 - U_{вим} (R_1 + R_d)) = R_2 (U_{дж} R_d + U_{вим} (R_1 + R_d)), \\ & R'_d = R_2 \frac{U_{дж} R_d + U_{вим} (t) (R_1 + R_d)}{U_{дж} R_1 - U_{вим} (t) (R_1 + R_d)}. \end{aligned} \quad (19)$$

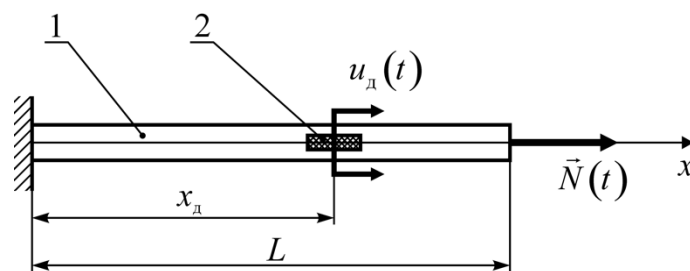
Завдяки співвідношенню (19) та виразу активного опору (17) тензодатчика можемо визначити:

$$u_d(t) = \frac{l}{R_d S_A} \left(R_2 \frac{U_{дж} R_d + U_{вим}(t)(R_1 + R_d)}{U_{дж} R_1 - U_{вим}(t)(R_1 + R_d)} - R_d \right), \quad (20)$$

де $u_d(t)$ – переміщення пружного стрижневого елемента в точці закріплення тензорезистора.

Співвідношення (20) дозволяє визначити залежність від часу переміщення точки закріплення тензодатчика на пружному елементі через вимірювану залежність увід часу напруження $U_{вим}$, яке у загальному випадку змінюється з часом.

Можемо досить легко визначати переміщення точки закріплення тензодатчика на пружному елементі за даними вимірювання напруження $U_{вим}$ за допомогою формули (20). Разом із тим, основним призначенням мехатронної тензометричної системи є визначення навантаження, тобто сили $\vec{N}$ (див. рис. 2). Таким чином, маємо наступну задачу: за заданим переміщенням (20) пружного стрижневого елемента в точці закріплення тензодатчика слід визначити зовнішню поздовжню силу $\vec{N}$, що діє на пружний елемент (рис. 4).



1 – пружний елемент; 2 – тензорезистор

Рис. 4. Схема визначення зовнішнього навантаження

Розв'язування задачі про визначення навантаження зводиться до розгляду диференціального рівняння (8) із крайовими умовами (9) та початковими умовами (6) разом із додатковою умовою наступного

вигляду:

$$u(x_d, t) = u_d(t), \quad (21)$$

де $u_d(t)$ – задана функція часу, що визначена за результатами вимірювань за допомогою формули (21).

Висновки. Наявність математичної моделі мехатронної тензOMETричної системи, що охоплює механічну та електронну компоненти, дозволить у подальшому дослідити вплив механічних та електричних характеристик на результати вимірювання і за рахунок цього обґрунтовувати можливості щодо удосконалення такої системи.

Математична модель пружного стрижневого елемента мехатронної тензOMETричної системи побудована на основі рівнянь теорії пружності та представлена у вигляді початково-крайової задачі для визначення залежності від часу поля переміщення уздовж довжини такого стрижневого пружного елемента. Недоліком запропонованої моделі є неврахування сил опору рухам пружного елемента, що призводить до присутності в одержуваних результатах незатухаючих високочастотних коливань. У подальшому планується вдосконалити запропоновану математичну модель пружного елемента за рахунок врахування в ній сил опору, що пропорційні швидкості руху.

Математична модель перетворювача вимірюваних електричних сигналів мехатронної тензOMETричної системи побудована на основі законів Кірхгофа для лінійних електричних ланцюгів постійного струму та представлена у вигляді залежності опору тензорезистора від вимірюваної електричної напруги. Певним недоліком запропонованого підходу є нехтування паразитними індуктивностями та ємностями, що можуть впливати на результати вимірювань високочастотних складових напруги. У подальших дослідженнях бажано вдосконалити запропоновану математичну модель перетворювача вимірюваних електричних сигналів за

рахунок врахування в ній паразитних індуктивностей та ємностей та дослідити їхній вплив на результати вимірювання високочастотних складових електричної напруги.

Література

1. De Silva C. W. *Mechatronics: A Foundation Course* – Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2010. 867 p.
2. Bolton W. *Mechatronics: Electronic Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering*, 6th edition. Pearson, 2015. 664 p.
3. Regtien P., Dertien E. *Sensors for Mechatronics*, 2nd Edition. Elsevier, 2018. 380 p.
4. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. *Елементи теорії пружності*. Львів: Світ, 1994. 560 с.
5. Можаровський М. С. *Теорія пружності, пластичності і повзучості*. К.: Вища школа, 2002. 308 с.
6. Lyshevski S. E. *Mechatronics and Control of Electromechanical Systems* – Boca Raton: CRC Press, 2017. 486 p.
7. Cetinkunt S. *Mechatronics with Experiments*, 2nd Edition. Wiley, 2015. 904 p.