Technical sciences

УДК 621.321

Аллахверанов Рауф Юсіф огли
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри КІТАР
Харківський національний університет радіоелектроніки
Allakhveranov Rauf
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Kharkiv National University of Radio Electronics

Осман Аміра Ясирівна
магістрант
Харківського національного університету радіоелектроніки
Osman Amira
Master Student of the
Kharkiv National University of Radio Electronics

Горовий Кирило Юрійович
керівник відділу планування та збуту готової продукції
ПРАТ "Verallia Україна"
Horovyi Kyrylo
Head of Planning and Shipping Department
PJSC "Verallia Ukraine"

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАВНОСТІ РУХУ РОБОТИЗОВАНИХ КОЛІСНИХ ПЛАТФОРМ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

STUDY OF SMOOTH MOTION OF ROBOTIC WHEELED PLATFORMS USING LINEAR MODELS

Анотація. *Розглянуто лінійні математичні моделі роботизованих колісних платформ для дослідження плавності їхніх рухів. Показано, що нерівномірність руху колісних платформ зумовлена наявністю узагальнених сил, які залежать від швидкості, в тому числі в'язкого демпфування та приводних двигунів з обмеженою потужністю, наприклад, електродвигунів постійного струму. Досліджено похідну від прискорення, що оцінює плавність руху колісної платформи, та розглянуто вплив в'язкого демпфування і кінцевої потужності приводних електродвигунів постійного струму. Для отримання достовірних аналітичних результатів розглядаються лише лінійні моделі колісних платформ. Врахування впливу демпфувальних сил зводиться до розв'язання простого диференціального рівняння другого порядку, а дослідження впливу обмеженої потужності приводних електродвигунів –до розв'язання системи порядкових диференціальних рівнянь, що включає рівняння руху другого порядку та рівняння першого порядку для електричного струму в еквівалентному електричному колі приводного електродвигуна постійного струму.*

Ключові слова: *робототехніка, електромеханіка, колісна платформа, рух, плавність, моделювання.*

Summary. *The linear mathematical models of robotic wheeled platforms are considered to research their motions' smoothness. It is shown that not smooth motions in the wheeled platforms are due to the existed generalized forces depending on the velocity, including the viscous damping and drive motors with the finite power like the direct current electric motors for example. It is researched the derivative of the acceleration estimating the motions' smoothness of the wheeled platform, and it is considered influencing of the viscous damping and the finite power of the drive direct current electric motors. To have the reliable analytical results, only linear models of the wheeled*

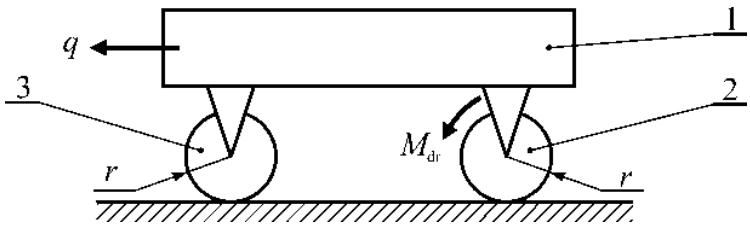
platforms are considered. Taking into account of the influence of the damping forces is reduced to solving the simple second ordered differential equation, but researching about the influence of the finite power of drive motors is reduced to solving the system of ordinal differential equations including the second ordered equation of the motion and the first ordered equation for the electric current in the equivalent electric circuit of the drive direct current electric motor.

Key words: *robotics, electro-mechanics, wheeled platform, motion, smoothness, modelling.*

Вступ. Однією з основних загальних тенденцій у сучасній промисловості є впровадження робототехнічних систем для максимального виключення обслуговуючого персоналу з максимально можливих операцій, особливо монотонних і небезпечних [1-4]. У розробленні промислових робототехнічних систем у цілому досягнуто значного прогресу, проте окремі конкретні проблеми на сьогодні принципово не вирішені.

Деякі види робототехнічних систем повинні забезпечувати надзвичайну плавність своїх рухів, насамперед, під час роботи з делікатними об'єктами, такими, як ядерні паливні збірки, крихкі матеріали тощо. Операції з такими делікатними об'єктами не є повністю автоматизованими через труднощі забезпечення необхідної плавності руху робототехнічних систем. Відомо [5; 6], що плавність руху визначається прискореннями вищих порядків, але ця тема не є повністю дослідженою з XIX століття, особливо з точки зору інженерних застосувань, хоча подібні проблеми розглядаються [7]. Це, природно, пов'язано з відносно короткою історією промислового застосування робототехнічних систем. Дійсно, спочатку основна увага приділялася головним промисловим операціям. Однак більшість основних типових промислових операцій, таких, як різання або зварювання, не вимагають надзвичайної плавності рухів, або

ця проблема може бути легко вирішена за рахунок спеціальних конструкцій. Водночас, розроблення універсальної робототехнічної системи дає можливість автоматизації широкого спектру промислових операцій, навіть допоміжних, а надзвичайна плавність рухів робототехнічних систем може знадобитися для того, щоб виключити людей з операцій з небезпечними делікатними об'єктами. Тут ми розглянемо дослідження основ плавності рухів чотириколісної платформи (рис. 1), що представляє широкий спектр типових робототехнічних систем.



1 – корпус; 2 – ведучі колеса; 3 – ведені колеса

Рис. 1. Загальна схема чотириколісної платформи

Дослідження розглянутої колісної платформи (рис. 1) будуть проводитися від найпростішого ідеального випадку руху, до розгляду лінійних демпфувальних сил і до остаточного дослідження впливу кінцевої потужності приводного двигуна. Об'єктом досліджень буде похідна прискорення колісної платформи (рис. 1), оскільки саме ця похідна визначає плавність руху.

Розглянемо ідеальний випадок руху. Ідеальний випадок руху колісних платформ (рис. 1) може бути реалізований одночасно за рахунок нескінченного тертя між колесами та ґрунтом для виключення ковзання, за рахунок нульового демпфування, а також за рахунок нескінченної потужності приводних двигунів.

Беручи до уваги припущення ідеального випадку руху, рівняння руху розглянутої колісної платформи матиме наступний вигляд:

$$m\ddot{q} = Q\,, \tag{1}$$

де q – узагальнена координата, що визначає прямолінійний поступальний рух розглянутої колісної платформи, як показано на рис. 1;

m – еквівалентна маса платформи;

Q – узагальнена сила платформи.

Рівняння (1) можна легко отримати, наприклад, використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, і ми отримаємо наступні результати для еквівалентної маси та узагальненої сили:

$$m = M + 4\frac{J}{r},\ Q = \frac{M_{\text{dr}}}{r}, \tag{2}$$

де M – загальна маса платформи;

J – момент інерції одного колеса;

r – радіус оболонки (див. рис. 1);

M_{dr} – привідна пара від електродвигуна (див. рис. 1).

Стан спокою будемо вважати початковим станом розглянутої колісної платформи (див. рис. 1), оскільки під час розгінних режимів руху притаманні неплавні рухи. Отже, маємо наступні початкові умови для диференціального рівняння (1):

$$q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0. \tag{3}$$

Розв'язання звичайного диференціального рівняння (1) з початковими умовами (3) є дуже простим, тому кінцевий результат розв'язання можна представити у такому вигляді:

$$q(t) = \frac{1}{2}\frac{Q}{m}t^2. \tag{4}$$

Розв'язок (3) дозволяє знайти похідну прискорення:

$$\ddot{q}(t) = 0. \tag{5}$$

Результат (5) показує, що ідеальний випадок руху має ідеальну плавність при постійній парі приводів. Отже, плавність руху в ідеальному випадку задається лише парою приводів.

Вплив лінійних демпфувальних сил. Лінійні демпфувальні сили –

це сили, що залежать від швидкості. Отже, якщо на розглянуту колісну платформу діють демпфувальні сили (див. рис. 1), то рівняння руху в цьому випадку матиме наступний вигляд:

$$m\ddot{q} = Q - b\dot{q}\ , \tag{6}$$

де b – параметр, який визначає демпфувальні сили.

Розв'язок лінійного диференціального рівняння (6) можна представити у наступному аналітичному вигляді:

$$q(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{Q}{b}t\ , \tag{7}$$

де C_1 та C_2 – константи інтегрування, що повинні бути визначені з початкових умов.

Використовуючи початкові умови (3), ми можемо знайти C_1 та C_2 константи інтегрування та і матимемо розв'язок (7) у вигляді:

$$q(t) = \frac{Q \cdot m}{b^2}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right) + \frac{Q}{b}t\ . \tag{8}$$

Розв'язок (8) дозволяє знайти похідну прискорення:

$$\dddot{q}(t) = -\frac{Q \cdot b}{m^2} e^{-\frac{b}{m}t}\ . \tag{9}$$

Результат (9) показує, що лінійні демпфувальні сили порушують плавність руху і навіть для постійної приводної пари маємо ненульову похідну прискорення (рис. 2).

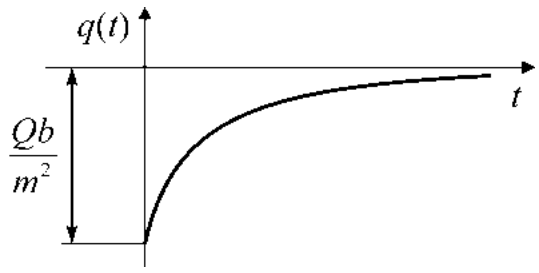


Рис. 2. Похідна прискорення колісної платформи з урахуванням сил в'язкого демпфування

Обмеження на плавність рухів можна сформулювати за допомогою допустимого значення похідної прискорення:

$$\dddot{q}(t) \le [\dddot{q}]. \tag{10}$$

де $[\dddot{q}]$ – допустиме значення похідної прискорення.

Нерівність (10), результат (9) і останнє поняття (2) дозволять вибрати приводну пару з урахуванням обмежень на плавність рухів розглянутої колісної платформи (див. рис. 1):

$$M_{\text{dr}} \le \frac{[\dddot{q}]m^2}{b} r. \tag{11}$$

Результат (11) теоретично показує, що в'язке демпфування дійсно порушує плавність руху, оскільки внаслідок граничного переходу нерівності (11) матимемо:

$$b \to 0 \Rightarrow M_{\text{dr}} \le \infty. \tag{12}$$

Отже, нерівність (12) показує, що нульове демпфування не обмежує приводну пару від двигуна через обмеження плавності руху (10).

Вплив на обмеженість рушійної сили. Потужність приводного двигуна принципово обмежена, і вона повинна впливати на плавність руху колісних платформ. Ми розглянемо це тут. Будемо вважати, що приводним двигуном є електродвигун постійного струму, а їхню еквівалентну електричну схему можна представити так, як показано на рис. 3. Відомо, що обертовий момент механічної пари електродвигуна постійного струму пропорційний електричному струму в обмотці ротора, а тому можна вважати наступне:

$$M_{\text{dr}} = B_{\text{e}} r I_{\text{e}}, \tag{13}$$

де B_{e} – електромеханічний параметр електродвигуна постійного струму;

I_{e} – електричний струм в обмотці ротора (рис. 3).

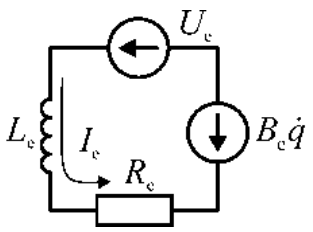


Рис. 3. Еквівалентне електричне коло, що представляє електродвигун постійного струму

Електричний струм в обмотці ротора (рис. 3) можна обчислити з наступного диференціального рівняння:

$$L_e\dot{I}_e = -R_e I_e - B_e\dot{q} + U_e\,, \tag{14}$$

де L_e – індуктивність обмотки ротора;

R_e – опір обмотки ротора;

U_e – напруга живлення.

Беручи до уваги нульові початкові умови (3), про які йшлося раніше, ми також розглянемо нульову початкову умову для диференціального рівняння (14):

$$I_e(0) = 0\,. \tag{15}$$

Таким чином, для представлення математичної моделі електромеханічної колісної платформи маємо систему диференціальних рівнянь, що включає звичайне диференціальне рівняння другого порядку (6) з урахуванням останнього співвідношення (2) та співвідношення (13), а також звичайне диференціальне рівняння першого порядку (14) з відповідними початковими умовами (3), (15). Для розгляду цих рівнянь доцільно представити їх у нормованому вигляді як систему диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього надалі будемо використовувати такі поняття координат фазового простору:

$$x_1 = q,\;\; x_2 = \dot{q},\;\; x_3 = I_e\,. \tag{16}$$

Використовуючи поняття (16), ми можемо представити звичайне диференціальне рівняння (6) другого порядку з урахуванням останнього

співвідношення (2) і співвідношення (13), а також звичайне диференціальне рівняння (14) першого порядку наступним чином:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 + \frac{B_e}{m}x_3,\ \dot{x}_3 = -\frac{b}{L_e}x_2 - \frac{R_e}{L_e}x_3 + \frac{U_e}{L_e}. \quad (17)$$

Початкові умови для системи (17) звичайних диференціальних рівнянь повинні бути отримані з понять (16) та початкових умов (3), (15), тому матимемо наступне:

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0. \quad (18)$$

Для подальших досліджень доцільно представити диференціальні рівняння (17) у матричному вигляді. Для цього введемо наступні вектори та матриці:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/m & B_e/m \\ 0 & -B_e/L_e & -R_e/L_e \end{pmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_e/L_e \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Використовуючи поняття (19), диференціальні рівняння (17) та початкові умови (18) можна представити у вигляді:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{u},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

Розв'язок лінійної задачі Коші (20) можна представити наступним чином:

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}\right)\cdot\left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{u}\right), \quad (21)$$

де I – одинична матриця.

Аналітичний розв'язок (21) дозволяє знайти похідну прискорення, але для цього достатньо знайти лише другу похідну розв'язку (21):

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^2 e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}. \quad (22)$$

Для оцінки похідної прискорення за результатом (22) скористаємося відомим співвідношенням

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \ldots. \quad (23)$$

Підстановка співвідношення (23) у розв'язок (22) дозволяє отримати наступний результат:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \left(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{u}\right) t + \dots . \tag{24}$$

Підстановка матриці з формул (19) до результату (24) приводить до наступної оцінки для похідної прискорення:

$$\dddot{q}(t) = \frac{B_{\text{e}} U_{\text{e}}}{m L_{\text{e}}} + \dots . \tag{25}$$

Нерівність (10) і результат (25) дозволять приблизно підібрати напруги живлення електродвигунів електроприводу постійного струму, що відповідають обмеженням на плавність рухів розглянутої колісної платформи (див. рис. 1):

$$U_{\text{e}} \le \frac{L_{\text{e}}}{B_{\text{e}}} m\left[\dddot{q}\right]. \tag{26}$$

Зазвичай нерівність (26) не включає параметр в'язкого демпфування через нехтування всіма елементами замість першого елемента в результаті (24). Водночас, урахування другого та інших доданків в результаті (24) призведе до значних труднощів в отриманні обмеження на напругу живлення.

Висновки. Результати, отримані в цьому дослідженні, дозволяють сформулювати наступні висновки:

– запропоновано низку лінійних математичних моделей роботизованих колісних платформ для дослідження проблеми плавності руху, що дозволяють сформулювати деякі властивості, притаманні плавності руху;

– ідеальний випадок руху колісних платформ може бути реалізований одночасно за рахунок нескінченного тертя між колесами і ґрунтом, що виключає ковзання, за рахунок нульового демпфування і за рахунок нескінченної потужності приводних двигунів. Абсолютна плавність руху колісної платформи під постійною приводною парою – це

ідеальний випадок їхнього руху при нескінченному терті між колесами і ґрунтом, що виключає ковзання, при нульовому демпфіруванні і при нескінченній потужності приводних двигунів;

– неплавні рухи колісних платформ неминуче будуть мати місце у випадках існування узагальнених лінійних демпфувальних в'язких сил, які залежать від швидкості руху платформ. Для забезпечення необхідної плавності руху в цьому випадку необхідне обмеження приводної пари, що відповідає допустимій похідній прискорення;

– для забезпечення необхідної плавності руху у випадку колісних платформ з приводним електродвигуном постійного струму необхідно обмежити значення напруги живлення електродвигунів, що відповідає допустимій похідній прискорення.

Література

1. Alyokhina S., Nevliudov I., Romashov Yu. Safe Transportation of Nuclear Fuel Assemblies by Means of Wheeled Robotic Platforms. *Nuclear and Radiation Safety*. 2021. Vol. 3(91). P. 43-50.

2. Ha Q.P., Yen L., Balaguer C. Robotic autonomous systems for earthmoving in military applications. *Automation in Construction*. 2019. Vol. 107. 102934.

3. Roshanianfard A., Noguchi N., Okamoto H., Ishii K. A review of autonomous agricultural vehicles (The experience of Hokkaido University). *Journal of Terramechanics*. 2020. Vol. 91. P. 155-183.

4. Tsitsimpelis I., Taylor C.J., Lennox B., Joyce M.J. A review of ground-based robotic systems for the characterization of nuclear environments. *Progress in Nuclear Energy*. 2019. Vol. 111. P. 109-124.

5. Resal H. Traité de cinématique pure. Paris: Mallet-Bachelier. 1862. 412 p.

6. Somoff J. Mémoire sur les accélérations de divers orders. Mémoires

de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VII série, tome VIII. 1864. № 5. 54 p.

7. Klancar G., Loknar M., Blazic S. Towards Time-Optimal CACD Motion Primitives with Smooth Transitions. *IFAC-PapersOnLine*. 2020. Vol. 53(2). P. 15544-15549.