

Технічні науки

УДК 004.94

Красняк Роман Тарасович

аспірант

Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Krasniak Roman

Postgraduate Student of the

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

Зікратий Віктор Сергійович

розробник програмного забезпечення

Playtika

Zikratyi Viktor

Software Developer

Playtika

**ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ
РІЗНИЦЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
КОНТРОЛЬНИХ ТОЧОК**

**THE FEATURES OF APPLYING THE FINITE DIFFERENCE
METHOD FOR MODELING THE TEMPERATURE FIELD OF
CONTROL POINTS**

Анотація. В роботі проаналізовано особливості застосування методу скінченних різниць для моделювання температурного поля складних поверхонь, з використанням різних типів датчиків, зокрема термометрів опору та термопар. Розглянуто конструкційні особливості термометрів опору та термопар та вплив їх розташування на вимірювальній поверхні на точність вимірювання температури.

Ключові слова: температурне поле, метод скінченних різниць, термометр опору, термонара.

Summary. The article analyzes the features of applying the finite difference method for modeling the temperature field of complex surfaces, using various types of sensors, particularly resistance thermometers and thermocouples. It examines the design features of resistance thermometers and thermocouples, and the impact of their placement on the measuring surface on the accuracy of temperature measurement.

Key words: temperature field, finite difference method, resistance thermometer, thermocouple.

На сьогоднішній день в розрахунковій практиці при розв'язуванні граничних задач спостерігається тенденція застосування дискретного моделювання, що дає можливість використовувати числові методи, орієнтовані на цифрові платформи. Алгебраїзація задачі здійснюється шляхом переходу до скінченних різниць, скінченних елементів тощо.

Специфіка сучасних інженерних задач полягає в тому, що незалежно від початкових передумов і способів постановки задачі на певному етапі її рішення здійснюється процедура дискретизації. Це дає альтернативу класичному підходу і істотно розширює клас вирішуваних задач. Тому дослідження теплових і механічних процесів в найрізноманітніших галузях все більше спирається на дискретні моделі, які володіють здатністю зберігати енергетичний баланс і відкривають широкі можливості для застосування сучасних чисельних методів.

Однак, традиційні форми дискретних методів приводять до задач великої розмірності, що вимагають для свого вирішення великих витрат часу і звернення до високопродуктивних комп'ютерних систем. Останніми роками комп'ютеризація наукових досліджень, проектних і

конструкторських робіт здійснюється на основі широкого використання інтегрованих комп'ютерних платформ. В зв'язку з цим виникає проблема пониження розмірності задач і прискорення обчислень. Проблема прискорених обрахунків особливо актуальна в дослідженні теплових полів в областях складної геометрії. Одним з шляхів вирішення цієї проблеми є перехід до простіших моделей і економніших розрахункових схем.

Питання вивчення дискретних моделей нетрадиційними засобами і розробка нових способів рішення граничних задач особливо актуальні в попередніх, проектувальних розрахунках, коли цілком можна обійтися без складних деталізованих моделей. Річ у тому, що більшість алгоритмів будуються за принципом послідовних наближень, а швидкість такого процесу, як відомо, істотно залежить від того, наскільки вдало вибрано перше наближення. Нові прийоми прискорених обчислень, що дозволяють цілеспрямовано і швидко коректувати параметри об'єкту на стадії проектування, здатні істотно скоротити термін і вартість розробок. Тому особливої актуальності зараз набувають питання побудови спрощених моделей і розробки швидких методів обчислень. Проте побудова простої моделі є далеко не простою задачею. Розробка простих, надійних і ефективних методів швидкого рішення граничних задач в областях складної форми вимагає радикального перегляду традиційних уявлень. Насамперед мова йде про створення спрощених обчислювальних моделей, призначених для швидкої реалізації на цифрових платформах з обмеженими обчислювальними ресурсами. Побудова математично несуперечливої фізично правдоподібної і, до того ж, достатньо простої моделі - досить складна задача. У таких випадках нерідко доводиться розробляти нові ідеї, змінювати мову, стиль і вигляд наукового дослідження. Великими можливостями в цьому плані володіє імовірнісне моделювання, зокрема, особливу увагу заслуговують схеми випадкових блукань, що володіють не тільки великими пізнавальними, але і обчислювальними можливостями.

Метод Монте-Карло [3], зумовлений роботами із створення атомних реакторів Нейман і Улам використовує апарат теорії ймовірності для вирішення прикладних завдань за допомогою комп'ютерних систем. Простота і універсальність схеми блукань за решіткою роблять її найбільш відповідною для практичної реалізації в областях складної форми. Проте, ця схема зв'язана з великими витратами часу із-за багатократного моделювання довгих випадкових траєкторій. Реалізація такої схеми вимагає наявності високопродуктивних комп'ютерних систем та розробки алгоритмів для генерування випадкових кодів. Слід зазначити, що сучасні цифрові комп'ютерні системи дозволяють моделювати еволюцію ансамблів блукаючих частинок і відкривають новий етап в розвитку згаданого методу.

В сучасних умовах при проведенні різноманітних технологічних процесів і наукових експериментів часто виникає проблема визначення значень неперервних величин, зокрема, температури в довільно вибраних точках досліджуваних об'єктів складної геометрії та прогнозування температурного поля цих об'єктів. Наведемо деякі з існуючих практичних способів визначення температурного поля, вказуючи при цьому на переваги та недоліки їх використання.

Вимірювання температури може здійснюватись різними способами, зокрема термометрами опору. Такий підхід базується на властивості провідників і напівпровідників змінювати свій електричний опір при зміні температури. Таким чином, омичний опір провідника чи напівпровідника представляє собою деяку функцію його температури $R=f(t)$. Вид цієї функції залежить від природи матеріалу.

Для виготовлення чутливих елементів серійних термометрів опору застосовують чисті метали, які б задовольняли наступні основні вимоги:

1. Вибирається метал з великим питомим електричним опором, оскільки, чим більший питомий опір, тим менше потрібно металу для одержання необхідного початкового опору термометра.

2. Метал стійкий до окислення і не вступає в хімічну взаємодію з вимірюваним середовищем, має високу відтворюваність значень електричного опору в інтервалі робочих температур

3. Температурний коефіцієнт електричного опору металу $\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$ повинен бути досить великим і незмінним. Цей коефіцієнт визначається співвідношенням

$$\alpha_{0...100} = (R_{100} - R_0)/100R_0,$$

де R_0 і R_{100} – опір зразка даного матеріалу при температурі відповідно 0 і 100 °С. Для більшості чистих металів $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-3} 1/^\circ\text{C}$.

4. Опір повинен змінюватися зі зміною температури по прямій чи плавній кривій без різких відхилень і явищ гістерезису.

Зазначеним вимогам найбільш повно відповідають платина, мідь, нікель і залізо.

Платина. Питомий електричний опір платини $\rho = 0,1 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$, а температурний коефіцієнт електричного опору в діапазоні температур від 0 до 100 °С $\alpha=3,9 \cdot 10^{-3} 1/^\circ\text{C}$.

Зміна опору платини виражається рівняннями:

– у діапазоні температур від 0 до +650 °С:

$$R_t = R_0(1 + at + bt^2)$$

– у діапазоні температур від -200 до 0 °С:

$$R_t = R_0[1 + at + bt^2 + c(t - 100)t^3]$$

де R_t і R_0 – опір платини при температурі відповідно t і 0 °С; a , b , c – постійні коефіцієнти, значення яких визначають при градуванні термометра по точках кипіння кисню, води і сірки ($a = 3,96847 \cdot 10^{-3} 1/^\circ\text{C}$; $b = -5,847 \cdot 10^{-7} 1/^\circ\text{C}$; $c = -4,22 \cdot 10^{-12} 1/^\circ\text{C}$).

Для платини, яка застосовується при виготовленні технічних термометрів, $R_{100}/R_0=1,391$.

Хоча характеристики платинових термометрів опору нелінійні, однак

відхилення від лінійної характеристики не перевищує 5% в інтервалі температур від 0 до 500 °С та 19 % в інтервалі температур від –200 до 0 °С.

Мідь. До переваг міді варто віднести низьку вартість, легкість одержання її в чистому виді, порівняно високий температурний коефіцієнт електричного опору $\alpha=4,26 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ і лінійну залежність опору від температури.

До недоліків міді відносяться малий питомий опір ($\rho = 0,017 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$) і легку окислюваність при температурі вище 100 °С. Для міді, яка застосовується при виготовленні термометрів опору, відношення $R_{100}/R_0 = 1,426$.

Нікель і залізо. Ці метали мають порівняно високий температурний коефіцієнт електричного опору: $\alpha_{\text{Ni}}=(6,21\dots6\dots6,34) \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\alpha_{\text{Fe}} = (6,25\dots6,57) \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ та відносно великий питомий опір: $\rho_{\text{Ni}} = (0,118\dots0,138) \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$; $\rho_{\text{Fe}} = (0,055\dots0,061) \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

До недоліків, що обмежують застосування нікелю і заліза для виготовлення термометрів опору слід віднести наступні: нікель і залізо складно отримати в чистому виді, що ускладнює виготовлення взаємозамінних термометрів опору; залежності опору заліза і, особливо, нікелю від температури виражаються кривими, що не можуть бути записані у вигляді простих емпіричних формул; нікель і, особливо, залізо, легко окислюються навіть при порівняно низьких температурах.

Іншим, одним з найпростіших та найдоступніших способів вимірювання температури в деякій області є використання термопари. Саме тому термопара служить одним з улюблених і найбільш зручних інструментів для вимірювання температур в дуже широкому інтервалі, починаючи від температур вище 1000° С і аж до температур значно нижче 0° С. Не дивлячись на те, що за допомогою термопар іноді досягається задовільна точність вимірюванні, їм все ж таки властиві різні похибки.

Точність термопар обмежується цілим рядом причин, зокрема:

- 1) відсутністю однорідності дротів термопар;
- 2) забрудненням або структурною зміною дротів з часом;
- 3) похибкою при вимірюванні електрорушійної сили (ЕРС);
- 4) паразитними ЕРС у дротах, що підводять, і клеммах;
- 5) недостатньо глибоким зануренням термопар в середовище, температура якого вимірюється.

Великої уваги потребує розгляд похибок, що викликаються теплопровідністю уздовж термопар. Так, при зануренні термопар в речовину, температура якої повинна вимірюватися, виникає деякий потік тепла, що йде від речовини через захисну трубку і який розповсюджується уздовж термопар у бік холодних спаїв.

При вимірюванні температури за допомогою термопар, ЕРС термопар, залежить від глибини занурення термопар в речовину, температуру якої потрібно виміряти. Іншими словами, температура вимірювального спаю термопар не співпадає з температурою речовини. Коли термопара занурюється в яку-небудь речовину для вимірювання її температури, виникає деякий тепловий потік від речовини до вимірювального спаю, а також вздовж дротів термопар, ізоляційних і захисних трубок. Отже, спостерігається деяке падіння температури, що визначається тепловим опором між вимірювальним спаєм і речовиною. Це явище спостерігається навіть при дослідженні температури в рідкому середовищі, в яке занурюють термопару.

Пониження температури обумовлене опором між поверхнею спаю і рідиною, тобто поверхневим опором плівки рідині навколо кінця термопар. Залежність між глибиною занурення d і похибкою $(t_1 - t_0)$ для трьох термопар, складених з мідного і константанового дротів діаметром 0,4; 0,25 і 0,15 мм ілюструється кривими на рисунку 1.1. Досліджуваною речовиною служить масло. Для створення однорідного розподілу температури масло знаходиться в товстій мідній трубці, поміщеній в трубку

з латуні. Масло нагріте в електричній печі приблизно до 140°C . З рисунку 1.1 видно, що для термопари діаметром 0,4 мм похибку не можна вважати малою. При зануренні на 5 см вона досягала величини $-1,0^{\circ}\text{C}$, складаючи для глибини занурення 3 см вже $-2,8^{\circ}\text{C}$. Навіть для термопари діаметром 0,15 мм помилка не була такою малою, щоб нею можна було нехтувати при точних вимірюваннях. Похибка буде тим помітнішою, коли теплопровідність дротів термопари висока або коли великий тепловий опір між спаєм і досліджуваною речовиною. Тому температуру неможливо виміряти точно. А якщо досліджувана область – тверда пластина, то похибка збільшується в багато разів.

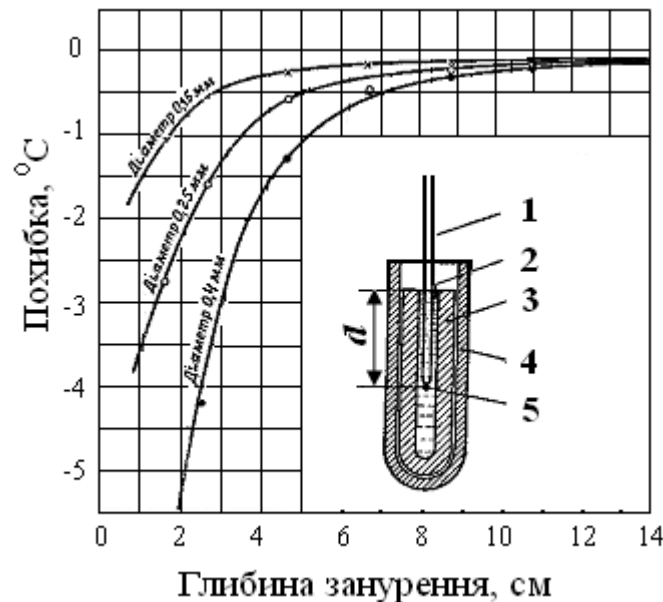


Рис. 1. Графік залежності похибки вимірювання від глибини занурення термопари: 1 – Термопара, 2 – Досліджуване середовище, 3 – Мідний тигель, 4 – Латунний тигель, 5 – Гарячий спай

Реалізувати прогнозування температурного поля, використовуючи термопару, яка дає значення температури лише в досліджених точках є дуже складним завданням або взагалі неможливим. Це залежить від складності геометричної форми досліджуваної області. Відомий спосіб визначення температури нагріву об'єктів, який полягає в розміщенні в контрольних

точках дротяних спіралей, вимірюванні кута їх закручування і визначенні максимальної температури нагріву [4].

Проте визначення температурного поля даним способом є дуже трудомістким і потребує багато як матеріальних, так і часових витрат. Відомий також спосіб визначення температурного поля, що ґрунтується на багатоточковій системі вимірювання температури, в якій напівпровідникові діоди використовуються як комутуючі елементи, і одночасно, відкритий діод виконує функцію термодатчика. Такі системи вимірювання містять діодні ключі-датчики температури, включені між електродами у вузлах матриці, ключі рядків і стовпців матриці, а також з'єднані паралельно генератор струму і вимірювальний пристрій, підключені до рядків і стовпців матриці [5].

Але нестабільність опору відкритого діода в часі, розкидання параметрів діодів навіть в межах однієї партії неминуче знижує точність вимірювання температури в різноманітних точках контрольованого поля. Даний спосіб є економічно недоцільним, оскільки контрольні заміри проводяться в багатьох точках. Також відомий спосіб визначення температурного поля, який ґрунтується на вимірюванні температури в контрольних точках досліджуваного об'єкту. При цьому визначення температурного поля досліджуваного об'єкту проводиться за допомогою вимірювання термо-ЕРС термопар, робочі спаї яких розміщені в контрольних точках об'єкту, що містяться на перетині рядків і стовпців сітки, утвореної термоелектродами. Крім того, послідовно вимірюють термо-ЕРС всіх термопар, робочі спаї яких розміщені на рядку і стовпчику сітки, що проходять через центр, і термо-ЕРС всіх термопар, робочі спаї яких розміщені вздовж ламаної лінії в напрямку діагоналі сітки, і при рівності різниці термо-ЕРС на ділянках рядка чи стовпця, що лежать, відповідно, між сусідніми стовпцями чи рядками, і різниці термо-ЕРС між

тими ж стовпцями і рядками на ламаній лінії по вимірним величинам визначають температурне поле контрольованого об'єкту [6].

Однак, недоліком описаного способу є велика тривалість визначення температурного поля об'єкту через послідовне вимірювання термо-ЕРС всіх термопар. Крім того, спосіб є трудомістким, що зумовлено залученням великої кількості апаратури для його реалізації. При проведенні спостережень, з метою виміряти ту чи іншу фізичну величину, то на результат нашого спостереження неминуче впливають сторонні чинники, кожний з яких окремо неможливо врахувати, але які породжують помилки у вимірюванні. Сюди відносяться помилки в стані вимірювального приладу, свідчення якого можуть нечутливо мінятися під впливом різних атмосферних, теплових, механічних або інших причин. Сюди відносяться помилки спостерігача, що викликаються особливостями його зору або слуху і також нечутливо змінні залежно від психічного або фізичного стану спостерігача. Фактична помилка вимірювання, таким чином, є результуючою величезної кількості нікчемних по величині, незалежних між собою, так би мовити, елементарних, залежних від випадковості помилок. В силу теореми Ляпунова можемо очікувати, що помилки спостережень будуть підпорядковані нормальному закону розподілу.

Література

1. Shumway R. H., Stoffer D. S. Time series analyses and its applications: With R examples. 3-rd ed. New York: Springer, 2011. 596 p.
2. Everitt B., Hothorn T. A handbook of statistical analyses using R. 2-nd ed. Chapman and HALL/CRC, 2009. 376 p.
3. Mazhdrakov M., Benov D., Valkanov N. The Monte Carlo Method: Engineering Applications. АСМО Academic Press, 2018. 250 p.
4. Авторське свідоцтво № 378730, кл. G 01 K 5/56, 1971.
5. Заявка Японії № 53-19433, кл. G 01 K 7/00, 1978.

6. Авторське свідоцтво № 18422, кл. G 01 K 7/02, 1997.