Фізико-математичні науки

УДК 514.177.2

Максимов Іван Іванович
кандидат технічних наук, доцент,
в.о. завідувача кафедри вищої математики та фізики
Криворізький національний університет
Maksymov Ivan
PhD in Engineering, Associate Professor,
Acting Headed of the Department of Higher Mathematics and Physics
Kryvyi Rih National University

Слободянюк Валерій Костянтинович
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри відкритих гірничих робіт
Криворізький національний університет
Slobodyanyuk Valeriy
PhD in Engineering, Associate Professor,
Associate Professor of the Open-cast Mining Department
Kryvyi Rih National University

Максимова Ірина Іванівна
кандидат економічних наук, доцент,
в.о. завідувача кафедри міжнародних відносин
Державний університет економіки і технологій
Maksymova Iryna
PhD in Economics, Associate Professor,
Acting Headed of the Department of International Economics
State University of Economics and Technology

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ ФЕРМА-ТОРРІЧЕЛЛІ ДЛЯ РІВНОБЕДРЕНИХ ТРИКУТНИКІВ
FEATURES OF DETERMINING THE COORDINATES OF THE FERMAT-TORRICELLI POINT FOR ISOSCELES TRIANGLES

Анотація. *У роботі з використанням методів математичної оптимізації та аналітичної геометрії встановлена формула для визначення координат точки Ферма-Торричели. Універсальна аналітична формула визначення координат точки Ферма-Торрічеллі для довільного трикутника на теперішній час не знайдена. Але рішення можливо отримати для симетричного рівнобедреного трикутника.*

Ключові слова: *координати точки Ферма-Торрічеллі, нерівнозваженні вершини трикутника, мінімізація транспортної роботи.*

Summary. *In the article, using the methods of mathematical optimization and analytical geometry, the formula for determining the coordinates of the Fermat-Torricelli point is established. To date, a universal analytical formula for determining the coordinates of the Fermat-Torricelli point of an arbitrary triangle has not been found. But the solution can be obtained for a symmetrical isosceles triangle.*

Key words: *coordinates of the Fermat-Torricelli point, unequally weighted triangle vertices, minimizing transport work.*

В 1636 році П'єр Ферма запропонував задачу в якій для трьох заданих точок необхідно знайти таку четверту точку, сума відстаней від якої до трьох заданих є найменшою. Дослідження Е. Торрічеллі, В. Вавіані, Б. Кавальєрі, Т. Сімпсона дозволили знайти та обґрунтувати геометричні розв'язки цієї задачі [1-3]. Вони зводяться до необхідності побудувати на сторонах заданого трикутника зовнішніх правильних трикутників (рис. 1). Якщо навколо побудованих правильних трикутників описати кола, то їхній перетин визначить оптимальну точку T (точку Ферма-Торрічеллі). В 1750 р. Т. Сімпсон довів, що відрізки AA', BB', CC' також перетинаються в оптимальній точці T. В 1834 р. Ф. Хайнен показав, що довжини цих відрізків дорівнюють сумі відстаней від точки Ферма-Торрічеллі до вершин даного трикутника.

$$AA' = BB' = CC' = TC + TB + TA$$

$$\angle BTC = \angle BTA = \angle CTA = 120°$$

Для знаходження оптимальної точки достатньо побудувати любі дві з зазначених вище ліній. Якщо один з кутів трикутника більше або дорівнює 120°, то відповідна вершина є оптимальною точкою.

При знаходженні координат оптимальної точки, одержуємо систему неалгебраїчних рівнянь. Незважаючи на майже чотирьохсотрічну історію задачі, не знайдені зручні формули для знаходження координат точки T. Це ускладнює проведення досліджень, складання економіко-математичних моделей та оптимізації логістичних схем. Знаходження координат оптимальної точки Ферма-Торрічеллі залишається актуальною задачею.

Для деяких видів трикутників можна підібрати систему координат і знайти координати точки Ферма-Торрічеллі. Розглянемо рівнобедрений трикутник з центром системи координат в середині основи і напрямком вісі OX вздовж висоти (рис. 2).

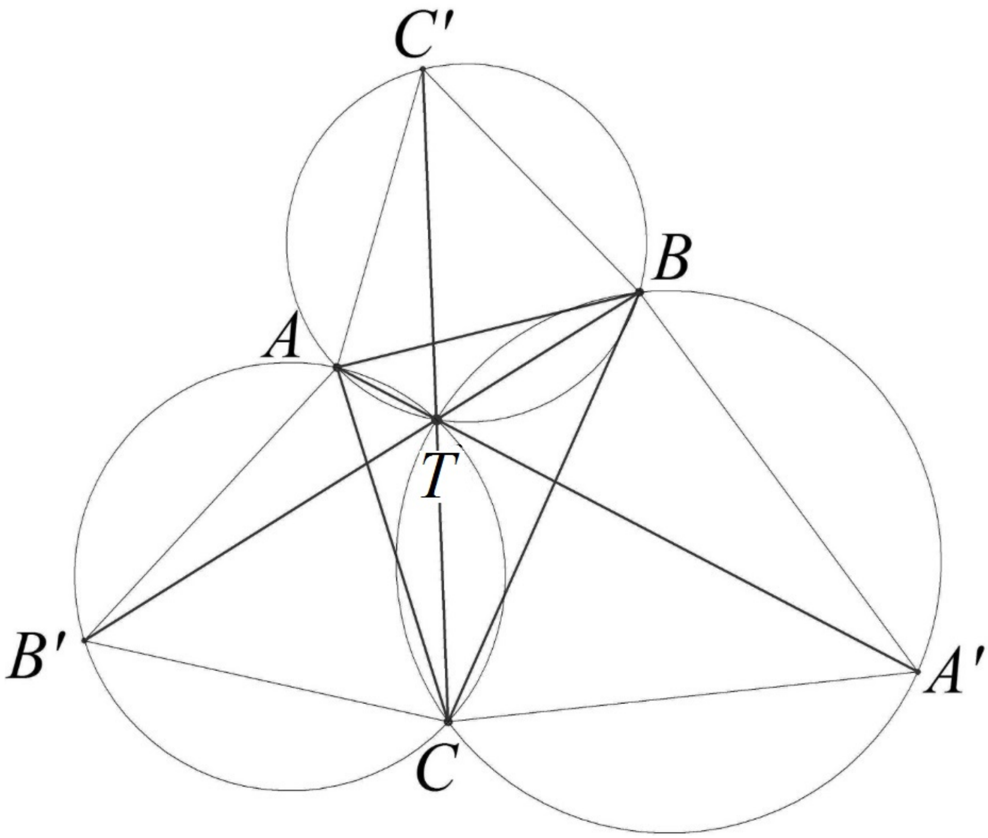

Рис. 1. Геометричне знаходження оптимальної точки Ферма-Торрічеллі

Розглянемо рівнобедрений трикутник з основою CB = α; та висотою OA = *h*. Очевидно, що при такому виборі системи координат точка T знаходиться на вісі OX і залишається знайти одну координату. Для довільної точки T (*x*; 0) сума відстаней до вершин трикутника дорівнює:

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + (h - x) \tag{1}$$

Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо координати оптимальної точки:

$$X_T = \frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}289 \cdot a \tag{2}$$

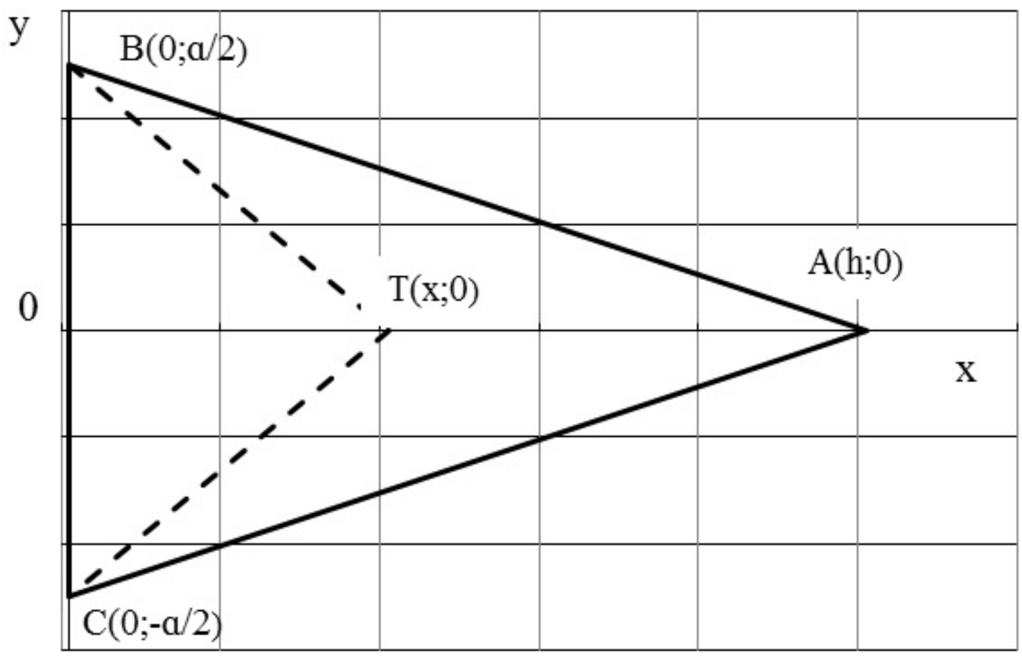

Рис. 2. Схема для визначення координат точки Ферма-Торрічеллі

Для рівнобедреного трикутника точка Ферма-Торрічеллі лежить на висоті на відстані $x = a\sqrt{3}/6$ від середини основи. Слід зазначити, що ця відстань залежить тільки від величини основи і не залежить від висоти трикутника. Для наглядності побудуємо графік функції (1). Графік (рис. 3) має асимптоту $y = x + h$.

Графік побудований для *h=2a*. При меншому або більшому значенні висоти, графік функції та його асимптота мають однакову форму, змінюється тільки їх висота. Найменша сума відстаней дорівнює $h + a\sqrt{3}/2$ при $x = a\sqrt{3}/6$. На проміжку x ϵ [0; 2a/3] сума залишається меншою $h + a$, а при x> 2a/3 зростає пропорційно збільшенню x.

Запропонований метод можна застосувати у випадку, коли вершини трикутника нерівнозважені. Прикладом такої задачі є пошук оптимального розміщення переробного підприємства, на яке з точок C; B; A надходять різні об’єми сировини [3].

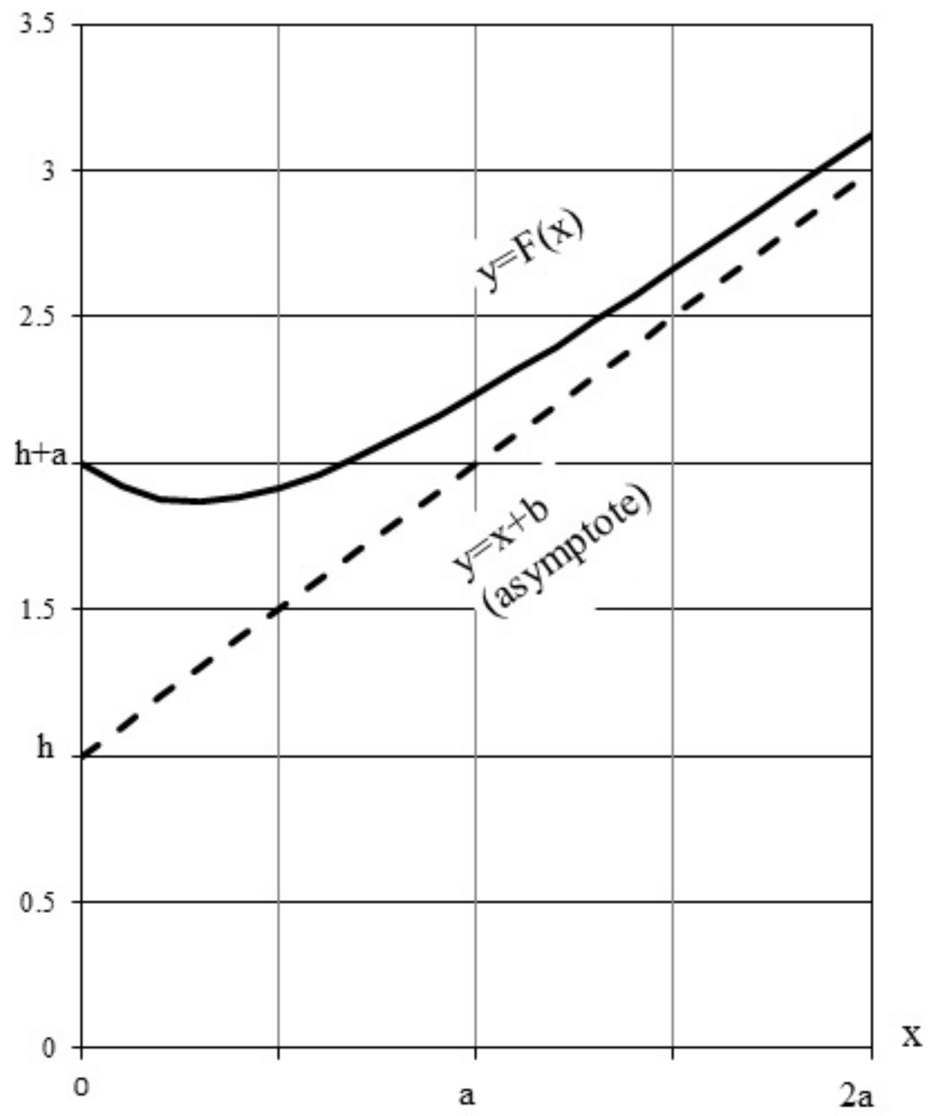

Рис. 3. Зміна суми відстаней до вершин трикутника при віддаленні точки Т від середини основи

Розглянемо випадок, коли з точки А надходить об'єм сировини $Q_A = K \cdot Q$, де $Q = Q_C = Q_B$ – об'єм сировини, що надходить з точок С і В. В такому випадку необхідно знаходити мінімум функції яка визначає об'єм транспортної роботи

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + K(h - x) \tag{3}$$

Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо координату оптимальної точки Т

$$x_T = \frac{K \cdot a}{2\sqrt{4 - K^2}} \tag{4}$$

Легко переконатися, що при К = 1, формула (4) дає значення, що співпадає з формулою (3). Для нерівнозважених вершин трикутника, координата оптимальної точки також не залежить від висоти трикутника (віддалення вершини А від основи). Вона залежить від основи (ɑ) та коефіцієнта перевищення об'єму сировини для вершини А, $K = Q_A/Q$.

При К<1, одержуємо значення $x_T < a\sqrt{3}/6$. Наприклад, якщо ***К*** = 0,5 знаходимо $x_T = a/2 \cdot \sqrt{15} \approx 0{,}129 \cdot a$. При цьому кут ∠ ВТС ≈ 151° (більше 120°, що відповідає К = 1). Якщо ***К***>1, то $x_T > a \cdot \sqrt{3}/6$ (∠ВТС < 120°), оптимальна точка ***Т*** наближається до вершини ***А***.

Для нерівнозважених точок трикутника геометричні методи знаходження оптимальної точки Ферма-Торрічеллі не спрацьовують. Єдиним методом є використання моделі. На площині в деякому масштабі будують трикутник АВС. В вершинах роблять отвори і пропускають шнури, які зверху зв'язують. До нижніх частин шнурів прив'язують ваги, пропорційні об'ємам перевезень Q_A; Q_B; Q_C. При вільному переміщенні шнурів врівноважене положення вузла відповідає розміщенню оптимальної точки. При проходженні вузла в один з отворів, відповідна вершина є оптимальною точкою. Досліди на різних фізичних моделях показують, що вершина трикутника буде оптимальною точкою, якщо відповідна вага буде дорівнювати сумі двох інших.

З формули (4) випливає, що при $\boldsymbol{K} \to 2$, $x \to \infty$ - може стати більшим любого значення h. Звідки випливає, що вершина ***А*** може стати оптимальною при К<2. Підставляємо в формулу (4) значення $x = h$ і знаходимо К:

$$K_A = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} \qquad (5)$$

З формули (5) випливає обернена залежність, при h → ∞; К → 2. Тобто, чим більш віддалена від основи вершина А, тим більше значення К = Q_A/Q, при якому ця вершина є оптимальною точкою. При $h = a \cdot \sqrt{3}/2$ (трикутник рівносторонній) $K = \cdot\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Вершина А стає оптимальною при умові, що Q_A на 73% перевищує Q = Q_C = Q_B. Якщо *h=a /2*, то $K = \cdot\sqrt{2} \approx 1{,}41$. При $h = \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ (кут при вершині А дорівнює 120°) ***К*** = 1. Якщо, *h=a*, то $K = \cdot 0{,}8 \cdot \sqrt{5} \approx 1{,}79$; якщо *h=2 a*, то К ≈ 1,94 (∠A ≈ 28°; ∠C = ∠B ≈ 76°). На рис. 4 наглядно показаний характер зміни коефіцієнта ***К*** при збільшенні *h*.

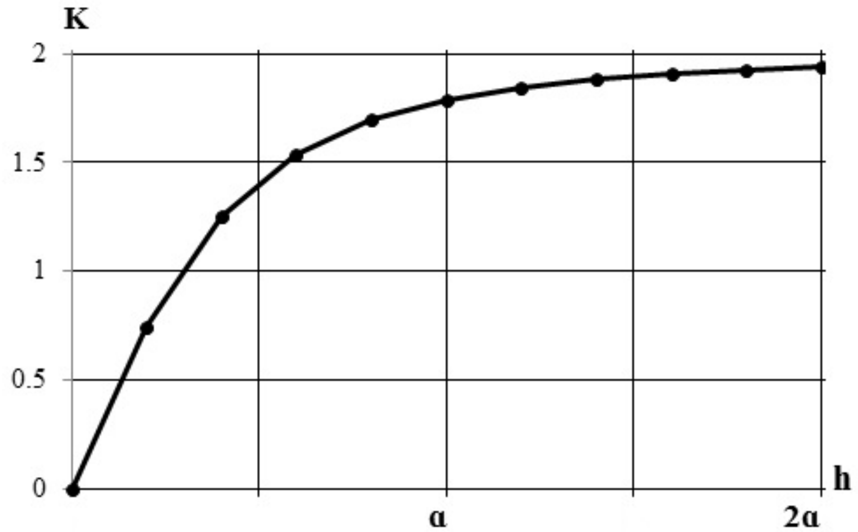

Рис. 4. Зміна коефіцієнта *К* при збільшенні висоти рівнобедреного трикутника

Проведеними дослідженнями показано, що вершина трикутника може бути оптимальною точкою при ***К***<2. Чим менше висота трикутника, тим при меншому значенні ***К*** вершина ***А*** може бути оптимальною точкою. Якщо ∠A більше 120°, то достатньо навіть значень ***К***<1.

Проведені дослідження дозволили уточнити деякі положення, пов'язані з оптимальною точкою Ферма-Торрічеллі:

- знайти координату оптимальної точки для рівнобедреного трикутника;
- показати характер зміни суми відстаней до вершин трикутника для різних точок його висоти;
- знайти координату оптимальної точки для нерівнозважених вершин трикутника;
- показати, що вершина трикутника може бути оптимальною точкою при К<2 (а іноді К<<2);
- показати характер зміни транспортної роботи для нерівнозваженні вершин трикутника.

На рис. 5 показаний характер зміни сумарної транспортної роботи (К=2) для різних точок висоти трикутника.

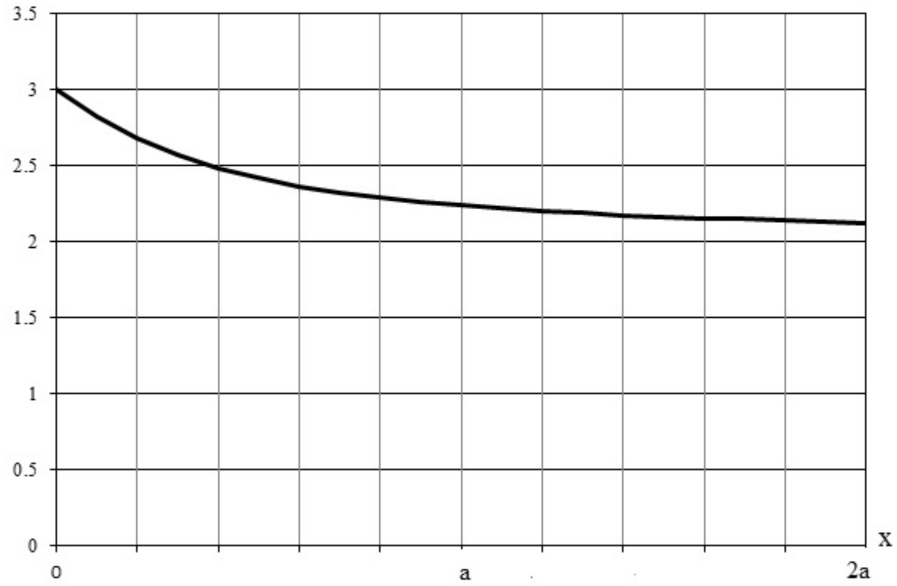

Рис. 5. Зміна сумарного об'єму перевезень при двократному перевищенні $Q_A = 2Q$

При переміщенні точки звезення з початку координат до вершини А об'єм перевезень знижується на 30%. Порівняння графіків на рис.3 та рис.5 показує, що для нерівнозначних вершин трикутника характер зміни сумарної транспортної роботи радикально змінюється.

З проведених досліджень можна зробити висновок про різні закономірності розміщення оптимальної точки Ферма-Торрічеллі для рівно- та різнозважених вершин трикутника.

Якщо точки рівнозважені, то координати оптимальної точки Т не змінюються при віддаленні вершини ***A***. При $h \geq \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ завжди $X_T = \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ (∠А менше 120°). При $h \leq \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ кут при вершині А стає ≥ 120° і ця вершина є оптимальною точкою **Т**.

Якщо точки різнозважені, то довільна точка висоти трикутника x ϵ (0 ; h] може бути оптимальною при відповідному значенні $K = 2x \Big/ \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$. При збільшенні ***К*** від 1 до $2h \Big/ \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$ координата оптимальної точки збільшується від $X_1 = \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ до $X_T = \cdot h$ (співпадає з вершиною А).

При К ϵ (0 ; 1]; $X_T \in \left(0; \cdot a\sqrt{3}/6\right)$.

Якщо $h \leq \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$, то кут при вершині А ≥ 120°, але при $K < 2h \Big/ \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$ оптимальною буде не вершина А (як при К=1), а внутрішня точка висоти.

Дане дослідження планується продовжити у напрямку більш детального вивчення зміни обсягу транспортної роботи для різних типів трикутників. Планується дослідити вплив змін положення та ваги вершин трикутника на координати точки Ферма-Торрічеллі. Виконуються дослідження щодо визначення координат Ферма-Торрічеллі для чотирьох і більше вихідних точок [4].

Література

1. Kupitz, Ya. S. The Fermat–Torricelli Problem, Part I: A Discrete Gradient-Method Approach / Ya. S. Kupitz, H. Martini, M. Spirova //

Journal of Optimization Theory and Applications. 2013. Vol. 158, No. 2. P. 305-327.
2. Geometric Methods and Optimization Problems. Kluwer, Dordrecht, 1999, 429 p.
3. Hajja, M. Zachos A. A complete analytical treatment of the weighted Fermat–Torricelli point for a triangle // Journal of Geometry. 2017. Vol. 108, No. 1. P. 99-110.
4. Максимова І.І., Слободянюк Р.В. Особливості визначення раціонального положення перевантажувального пункту. Матеріали 11-ї міжнародної науково-практичної конференції «Перспективи розвитку будівельних технологій». Дніпропетровськ : НГУ. 2017. С. 43-47.