Economic sciences

УДК 004.942

Колінько Марія Омелянівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Львівський національний університет імені Івана Франка
Kolinko Mariia
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Lviv Ivan Franko National University

Жумік Оксана Василівна
кандидат фізико-математичних наук
Львівський національний університет імені Івана Франка
Zhumik Oksana
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Ivan Franko National University of Lviv

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ЧЕРГИ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОБОТИ ЗАСОБІВ ЗВ'ЯЗКУ ТА ЕЛЕКТРОННОГО ОБЛАДНАННЯ ПІДПРИЄМСТВА

APPLICATION OF QUEUING MODELS TO OPTIMIZE THE OPERATION OF COMMUNICATIONS AND ELECTRONIC EQUIPMENT OF THE ENTERPRISE

Анотація. *Актуальність моделювання систем масового обслуговування, зокрема, створення моделей черг, зумовлена необхідністю оптимізації роботи систем масового обслуговування під час економічного зростання та автоматизації процесів обслуговування. У роботі розглянуто застосування моделей черг як для покращення рівня обслуговування клієнтів страхової компанії так і для полегшення роботи працівників компанії, здійснена побудова і практична реалізація декількох моделей масового* *обслуговування, які стосуються роботи оператора телефонного зв'язку компанії, зокрема, за допомогою імітаційного моделювання на основі електронних таблиць.*

Ключові слова: *система масового обслуговування, черга, узагальнена базова модель черги.*

Summary. *The Relevance of modeling queuing systems, in particular, the creation of queue models, is due to the need to optimize the operation of queuing systems during economic growth and automation of service processes. The paper considers the use of queue models both to improve the level of customer service of the insurance company and to facilitate the work of the company's employees, the construction and practical implementation of several queuing models related to the work of the company's telephone operator, in particular, using simulation modeling based on spreadsheets.*

Keywords: *queuing system, queue, generalized basic queue model.*

Очікування того чи іншого виду обслуговування є частиною нашого повсякденного життя. Будь-яким інформаційним потокам і документообігу властиве таке поняття як черга.

Черга – це будь-яка послідовність, елементи якої очікують на обслуговування. Створення основ теорії масового обслуговування, одним з розділів якої є теорія черг, приписують датському інженеру А.К.Ерлангу. Він розробляв телефонні комутатори в Копенгагені для датської телефонної компанії. Багато одержаних ним теоретичних результатів і сьогодні широко використовуються. Приклад використання теорії масового обслуговування – це аналіз інформаційних потоків і документообігу. У епоху масової автоматизації і високих інформаційних технологій великої актуальності набуває швидкість і якість обробки інформації і т.д.

У роботі системою масового обслуговування є страхова компанія. Для оптимізації роботи цієї системи можуть бути застосовані моделі черг.

У роботі розглянуто застосування моделей черг як для покрашення рівня обслуговування клієнтів страхової компанії так і для полегшення роботи працівників страхової компанії.

Можна побудувати багато моделей систем масового обслуговування, варіюючи операційні характеристики систем.

Для обчислення основних робочих характеристик базової моделі достатньо (разом з припущеннями про модель) знати значення двох основних параметрів моделі: λ - інтенсивність надходження завдань у систему, і μ - інтенсивність обслуговування завдань сервісом. Формули для обчислення інших характеристик моделі наведені у таблиці 1 [1]. Слід зауважити, що формули у цій таблиці виконуються тільки при умові, що $\lambda < \mu$. Якщо ця умова не виконується (тобто при $\lambda \geq \mu$), кількість завдань у черзі може необмежено зростати. У базовій моделі припускається, що процеси надходження клієнтів у систему та обслуговування клієнтів мають експоненціальний закон розподілу.

Таблиця 1

Робочі характеристики базової моделі

Характеристика	Позначення	Формула
Коефіцієнт завантаження системи	-	λ/μ
Середня кількість завдань у системі	L	$\lambda/(\mu-\lambda)$
Середня кількість завдань у черзі (середня довжина черги)	L_q	$\lambda^2/\mu(\mu-\lambda)$
Середній час перебування у системі	W	$1/(\mu-\lambda)$
Середній час очікування у черзі	W_q	$1/\mu(\mu-\lambda)$
Ймовірність того, що система порожня	P_0	1-λ/μ

Експоненціальний розподіл може гарно описувати процес надходження клієнтів у систему, але він може не відповідати процесу обслуговування. Існує узагальнення базової моделі, яке дозволяє не задавати у явному вигляді розподіл часу обслуговування одного клієнта. Тут необов'язково знати закон розподілу часу обслуговування, достатньо знати його середнє (математичне сподівання) $1/\mu$ і дисперсію σ^2. Формули для обчислення робочих характеристик узагальненої моделі наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Робочі характеристики узагальненої моделі

Характеристика	Позначення	Формула
Коефіцієнт завантаження системи	-	λ/μ
Середня кількість завдань у системі	L	$L_q + \lambda/\mu$
Середня кількість завдань у черзі	L_q	$\dfrac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$
Середній час перебування у системі	W	$W_q + 1/\mu$
Середній час очікування у черзі	W_q	L_q/λ
Ймовірність того, що система порожня	P_0	$1 - \lambda/\mu$

Як базова модель, так і узагальнена базова модель стосуються черги з одним сервісом.

Можна побудувати безліч моделей черг як з одним, так і з багатьма сервісами і чим далі модель відходить від базової, тим складнішими є формули для обчислення загальних характеристик черги.

Нами здійснена побудова і практична реалізація моделей масового обслуговування, які стосуються роботи оператора телефонного зв'язку компанії.

Побудуємо модель, яка повинна допомогти керівнику компанії вибрати найкращу кількість ліній телефонного зв'язку. Це питання є актуальним, наприклад, для страхових компанії з багатьма видами страхування і багатьма відділами, оскільки клієнт спочатку додзвонується до оператора, який переключає його на потрібний відділ і є ймовірність, що лінія буде зайнята. Задача про те, скільки ліній необхідно закупити переважно розв'язується з використанням моделей типу $M/G/s$. Це тип моделі з s сервісами (s телефонний ліній), експоненціальним розподілом часу між дзвінками і довільним типом розподілу часу обслуговування (у цьому прикладі час обслуговування – це тривалість телефонної розмови). Звичайні телефонні комутатори володіють властивістю, яка на професійному жаргоні називається «звільнення від заблокованих клієнтів». Це означає, що якщо клієнт, який тільки що поступив, бачить, що всі засоби обслуговування зайняті (всі лінії зв'язку зайняті), то він не стане у чергу, а просто покине систему. Існують більш досконалі системи, які утримують скінченну кількість клієнтів у черзі в очікуванні звільнення лінії, а деякі навіть дозволяють при цьому послухати музику.

Проблема вибору оптимальної кількості телефонних ліній (сервісів) зводиться до обчислення ймовірності того, що у стаціонарному стані системи рівно j ліній будуть зайняті. Очевидно, що якщо у наявності є s телефонних ліній і всі вони зайняті, то наступний клієнт не зможе подзвонити.

Ймовірність того, що у стаціонарному стані системи точно j сервісів будуть зайняті при наявності s ліній (сервісів), можна обчислити за формулою

$$P_j = \frac{(\lambda/\mu)^j/j!}{\sum_{k=0}^{s}(\lambda/\mu)^k/k!}, \qquad (1)$$

де λ - інтенсивність надходження завдань (частота, з якою надходять дзвінки); $1/\mu$ - середній час обслуговування (середня тривалість телефонної розмови); s – кількість сервісів (телефонних ліній). Ця формула називається формулою *Ерланга.*

Розглянемо систему, у якій $\lambda = 1$ (інтенсивність надходжень – один дзвінок за хвилину) і $1/\mu = 10$ (середня тривалість розмови – 10 хв.) Отже, $\lambda/\mu = 10$. Припустимо, що у системі п'ять телефонних ліній ($s = 5$), і можна знайти ймовірність того, що у стаціонарному режимі системи дві з них будуть зайняті ($j = 2$).

Інші значення P_j можна достатньо просто підрахувати в електронних таблицях (рис. 1), застосовуючи наступну формулу

$$P_i \quad = P_{i-1}(\lambda/\mu)i \qquad (2)$$

яка описує залежність між послідовними значеннями цих ймовірностей.

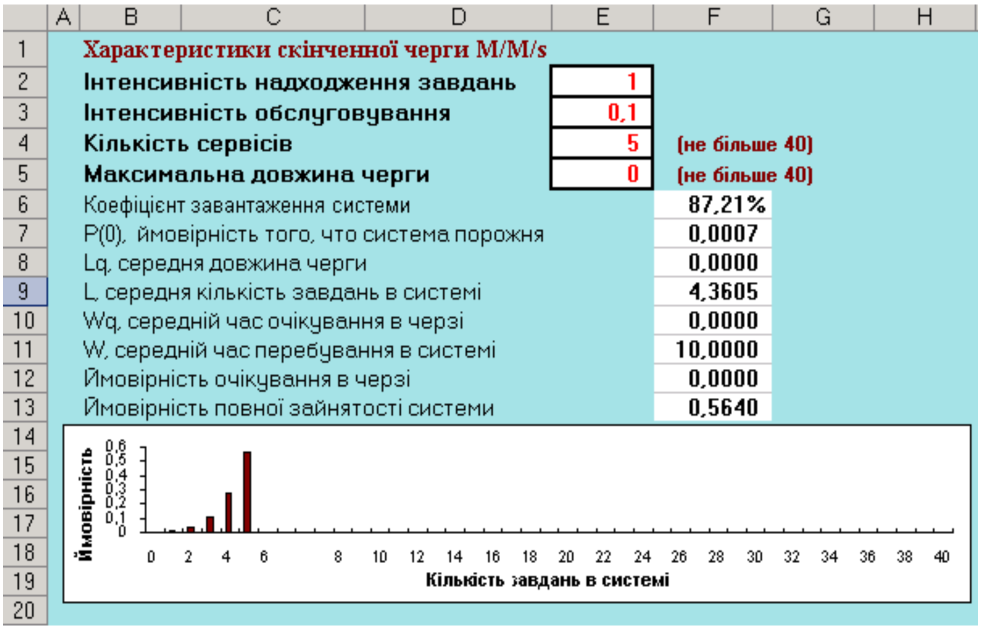


Рис. 1. Робочий лист з обчисленими характеристиками черги з 5 сервісами

На рисунку 2 показана таблиця підстановок, у якій обчислені значення ймовірності того, що система буде зайнята при різних значення *s* (*s* змінюється від 0 до 10). До цієї таблиці добавлено стовпчик D, у якому обчислюються зміни ймовірності при кожному додаванні нового сервісу. Ці зміни ймовірності є тим меншими, чим більше в системі сервісів. Наприклад, якщо в системі є один сервіс, то додавання другого зменшить ймовірність зайнятості системи на 0,089, тоді як додавання десятого сервісу зменшить цю ймовірність тільки на 0,059.

	A	B	C	D	E
21			Ймовірність повної зайнятості системи		
22		*s*	0,563952177	Зменшення ймовірності	
23		**0**	1		
24		**1**	0,909	0,091	
25		**2**	**0,820**	0,089	
26		**3**	0,732	0,088	
27		**4**	0,647	0,085	
28		**5**	0,564	0,083	
29		**6**	0,485	0,079	
30		**7**	0,409	0,075	
31		**8**	0,338	0,071	
32		**9**	0,273	0,065	
33		**10**	0,215	0,059	
34					

Рис. 2. Значення ймовірності повної зайнятості системи при різних значеннях кількості сервісів

Існує ще одна характеристика, яка часто використовується при встановленні телефонних ліній – це середня кількість зайнятих ліній.

Нехай N – середня кількість зайнятих сервісів, тоді

$$N = (\lambda / \mu) \times (1 \text{ - ймовірність повної зайнятості системи}) \quad (3)$$

Телефонна модель, що розглядалася вище має параметри $\lambda = 1$ і $1/\mu = 10$ Тому, якщо підприємство закупить 10 ліній, то ймовірність того, що всі 10 ліній будуть зайняті рівна 0,215 (комірка С33). З формули (3) випливає, що $N = 10 \times (1 - 0{,}215) = 7{,}85$.

Іншими словами, всі засоби обслуговування будуть зайняті з ймовірністю 0,215 (тобто близько п'ятої частини часу роботи), і в середньому майже вісім телефонних ліній будуть постійно зайняті. Обчисливши значення *N,* коефіцієнт завантаження системи можна визначити шляхом ділення *N* на *s* (кількість сервісів). Для нашої моделі коефіцієнт завантаження системи рівний 7,85/10=78,5%. Це означає, що кожний сервіс буде обслуговувати клієнтів 78,5% всього часу роботи (в середньому) і буде незайнятим 21,5% часу.

Якщо керівництво організації вирішить встановити 10 телефонних ліній, то у 70-80 випадках із ста можна бути вільно додзвонитися, що для деяких організацій є надлишковим, а для деяких може бути оптимальним. Якщо керівництво організації не задовольняє рішення, яке грунтується на виборі прийнятного значення ймовірності повної зайнятості системи, воно може визначити вартість кожного втраченого дзвінка і вирішити, скільки необхідно телефонних ліній, щоб сподівана вартість була мінімальною.

Тепер розглянемо задачу, у якій потрібно вирішити, скільки страховій компанії потрібно прийняти на роботу робітників, щоб підтримувати у робочому стані 20 електронних пристроїв. Робітники ремонтують їх за схемою «першим прийшов (точніше, першим поломався) – першим обслужишся». Кожний робітник може полагодити будь-який пристрій. Тому поломаний пристрій стає в кінець черги, яка обслуговується декількома паралельними сервісами (робітниками). Це модель $M/M/s$, зі скінченним джерелом завдань. В даній моделі кількість клієнтів, які можуть ввійти в систему, обмежена кількістю 20.

Розглянемо модель з 20 пристроїв і 2 робітників. Припустимо, що час між поломками устаткування має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 0{,}25$ (за годину), тобто середній час між поломками $1/\lambda = 4$ год. Аналогічно припустимо, що час, який потрібний на ремонт одного пристрою, є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом розподілу із середнім 0,5 год. (тобто $1/\mu = 0{,}5$). Тому дана модель є моделлю виду $M/M/2$ з максимальною довжиною черги 18 (всього 20 завдань, включаючи 2, які знаходяться на обслуговуванні) із скінченним джерелом. Тому одна із основних характеристик моделі, ймовірність того, що в стаціонарному режимі в системі буде знаходитися n завдань, буде функцією від чотирьох змінних: λ, μ, s (кількість сервісів) і N (максимальна кількість завдань). Ця формула має наступний вигляд:

$$P_n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}(\lambda/\mu)^n P_0, \quad 0 \le n \le s,$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}}(\lambda/\mu)^n P_0, \quad s \le n \le N. \tag{4}$$

Приєднавши рівність

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1, \tag{5}$$

одержимо систему, яка складається з N+1 лінійних рівнянь (N рівнянь, які задаються формулами (4), і рівняння (5)) з N+1 невідомими $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. З цієї системи можна знайти (часто для цього потрібно більше зусиль) значення ймовірностей P_n для будь-якої моделі. Як можна помітити, по мірі ускладнення моделей все більш складними стають формули для обчислення P_n.

На рисунку 3 наведено робочий лист, який можна використовувати для обчислення значень ймовірностей P_n, середньої (сподіваної) кількості клієнтів в системі і сподіваної тривалості перебування клієнта в системі для різних моделей даного типу.

Рис. 3. Модель черги зі скінченним джерелом завдань з двома сервісами

Як показано на рисунку 3, для нашої моделі L_q середня кількість пристроїв, які очікують ремонту, рівна 3,348 (комірка F8), а *W,* сподівана тривалість ремонту одного пристрою, рівна 1,405 год. (комірка F11). Коефіцієнт завантаження робітників достатньо високий – 92,5%, а ймовірність того, що вони простоюють, рівна всього 3,3%. В середньому одночасно ремонту потребують 5,19 пристроїв.

Якщо для порівняння розглянути аналогічну модель черги з 3 сервісами (3 робітники) (рис. 4), то одержимо наступне: середня кількість пристроїв, що очікують ремонту рівна 0,74016 (комірка F8), що значно менше, ніж при 2 сервісах, а сподівана тривалість ремонту одного пристрою рівна 0,67293 год. (комірка F11). Коефіцієнт завантаження робітників рівний 71,33%, а ймовірність того, що вони знаходяться без роботи рівний 7,8%. Одночасно потребують ремонту 2,88 пристроїв.

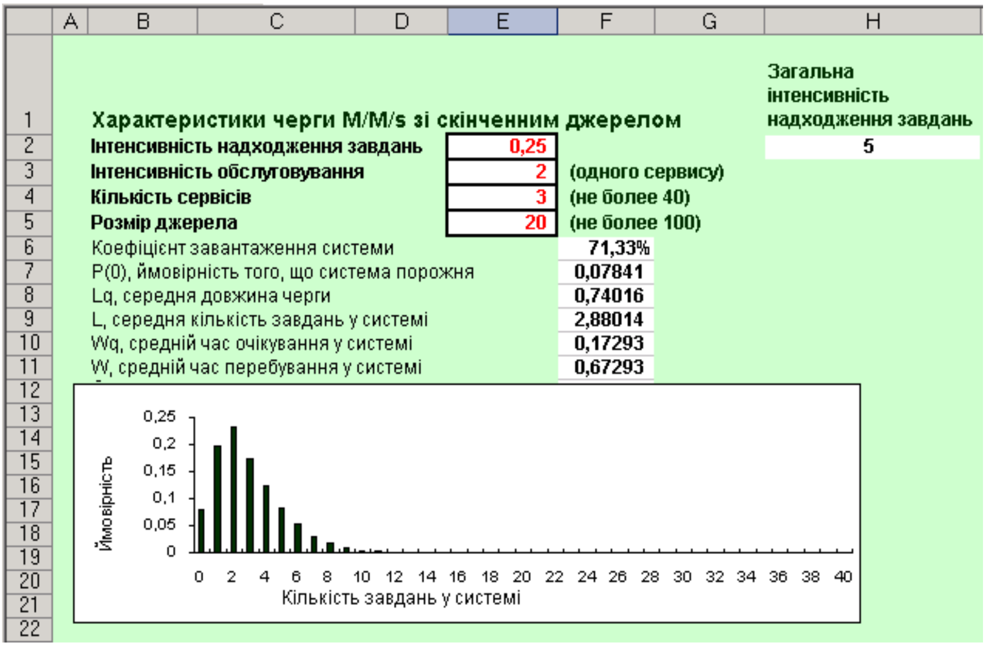


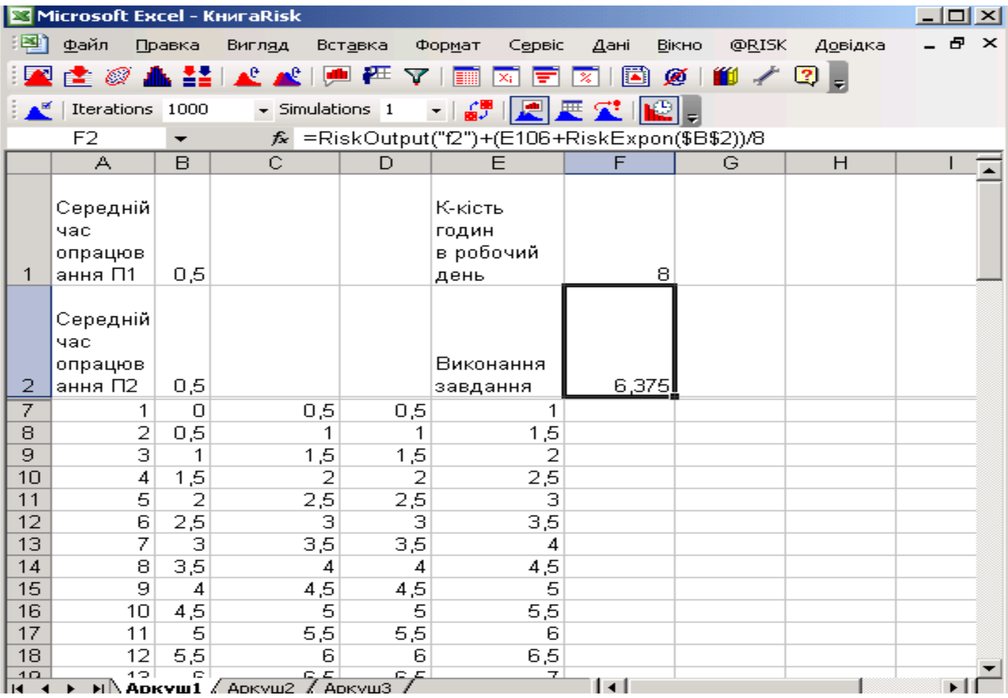
Рис. 4. Модель черги зі скінченним джерелом завдань з трьома сервісами

Якщо врахувати, що прийом на роботу третього працівника – це додаткові витрати, а при двох робітниках ми отримали цілком прийнятні показники, то керівництву компанії можна порадити прийняти двох робітників для обслуговування електронного обладнання.

Також у роботі розглянута імітаційна модель черги. Вона застосовувалась до черги, до якої не можна застосувати базову модель. Керівництву компанії корисно знати середній час опрацювання деякої кількості однорідних документів (припустимо 100) (під опрацюванням тут може розумітися занесення в базу даних, нарахування тарифних ставок, визначення величини пошкоджень при страховому випадку експертом страхової компанії) для того, щоб уникнути створення великих черг чи навпаки простою обладнання і персоналу. Припустимо, що один документ опрацьовується спочатку однією людиною, а потім передається у інший відділ для продовження роботи з ним іншій людині. Середній час опрацювання документу у кожному відділі складає 30 хв.

У нашій моделі $\lambda = \mu$, а формули базової моделі справедливі тільки тоді, коли $\mu > \lambda$.

Створимо в Excel робочу книгу для імітації опрацювання 100 документів (рис. 5).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Середній час опрацювання П1	0,5			К-кість годин в робочий день	8			
2	Середній час опрацювання П2	0,5			Виконання завдання	6,375			
7	1	0	0,5	0,5	1				
8	2	0,5	1	1	1,5				
9	3	1	1,5	1,5	2				
10	4	1,5	2	2	2,5				
11	5	2	2,5	2,5	3				
12	6	2,5	3	3	3,5				
13	7	3	3,5	3,5	4				
14	8	3,5	4	4	4,5				
15	9	4	4,5	4,5	5				
16	10	4,5	5	5	5,5				
17	11	5	5,5	5,5	6				
18	12	5,5	6	6	6,5				

Рис. 5. Таблиця часу виконання завдання для імітаційної моделі

Щоб проаналізувати вплив часу опрацювання документу на тривалість виконання завдання замінимо в робочій таблиці константу 0.5, яка рівна часу опрацювання для двох працівників, на значення випадкових величин, які мають таке ж середнє значення (ми скористаємося надбудовою @RISK і замінимо посилання на комірки В1 і В2 формулами =RiskExpon(B1) і =RiskExpon(B2)). У цьому випадку виконання замовлення буде випадковою величиною. Ми хочемо одержати значення часу виконання роботи, який буде відповідати дійсності з різними ймовірностями, наприклад 99% (тобто, в 99 випадках зі 100 реальний час виконання роботи не буде більшим за знайдене значення).

В електронних таблицях достатньо просто знайти це значення. На рисунку 6 показано вікно надбудови @RISK, де представлені ймовірнісні характеристики для значення комірки F2 (час виконання завдання в днях), які грунтуються на 1000 імітаціях опрацювання 100 документів двома працівниками.

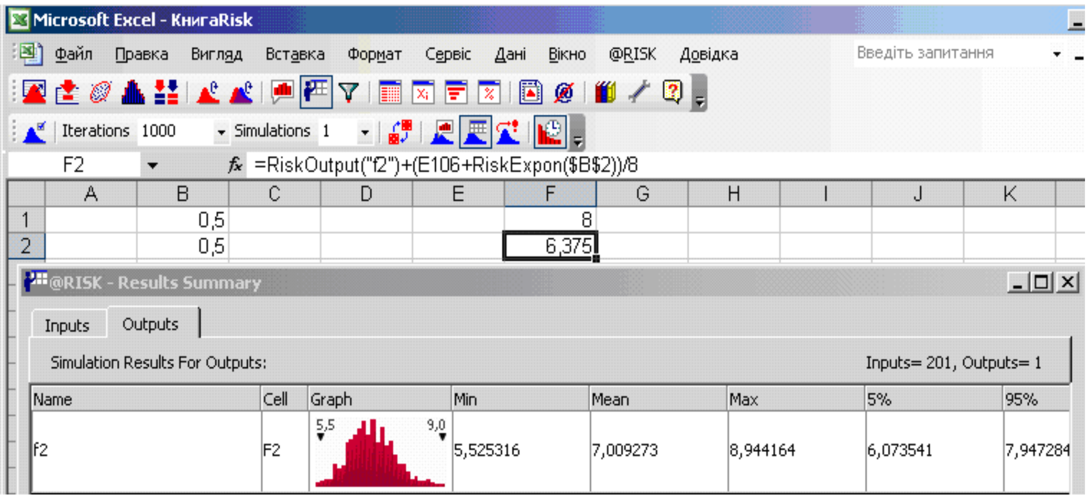


Рис. 6. Статистичні характеристики моделі виконання завдання з експоненціальним розподілом часу надходження завдання

Отже, середній час виконання роботи (значення в полі Mean для комірки F2) буде рівним 7,01 дня, що більше від обчисленого раніше (6,375) у зв’язку з непостійністю значень часу опрацювання документів. Якщо ми хочемо бути на 99% впевненими, що робота буде виконаною вчасно, ми повинні встановити термін виконання роботи рівним 8,54 дня (значення Target#(Value) на рисунку 7).

@RISK - Detailed Statistics

Name	f2		1	1	2	2
Description	Output	RiskExpon(B2)	RiskExpon(B1)	RiskExpon(B2)	RiskExpon(B1)	RiskExpon(B2)
Cell	Аркуш1!F2	Аркуш1!F2	Аркуш1!C7	Аркуш1!E7	Аркуш1!C8	Аркуш1!E8
# Values Filtered	0	0	0	0	0	0
Target #1 (Value)	8,54727097886203					
Target #1 (Perc%)	99%					
Target #2 (Value)	8,28816600131081					
Target #2 (Perc%)	98%					
Target #3 (Value)	8,15815993208657					
Target #3 (Perc%)	97%					
Target #4 (Value)						

Рис. 7. Статистичні характеристики моделі виконання завдання

Якщо припустити, що інтервал часу між надходженнями є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами 0,5 і 0,1 чи параметрами 0,5 і 0,3, то отримаємо інші показники (див. рис. 8 і рис. 9).

@RISK - Detailed Statistics

Name	f2	Виконання завда..	1	1 / Виконання за..
Description	Output	RiskNormal(B2;0..	RiskNormal(B1;0..	RiskNormal(B2;0..
Cell	Аркуш1!F2	Аркуш1!F2	Аркуш1!C7	Аркуш1!E7
Filter Type				
# Values Filtered	0	0	0	0
Target #1 (Value)	6,78069004160125			
Target #1 (Perc%)	99%			
Target #2 (Value)	6,73810704401925			
Target #2 (Perc%)	98%			
Target #3 (Value)	6,71110013682225			
Target #3 (Perc%)	97%			
Target #4 (Value)				

Рис. 8. Статистичні характеристики моделі з нормально розподіленим часом надходження завдання з параметрами 0,5 і 0,1

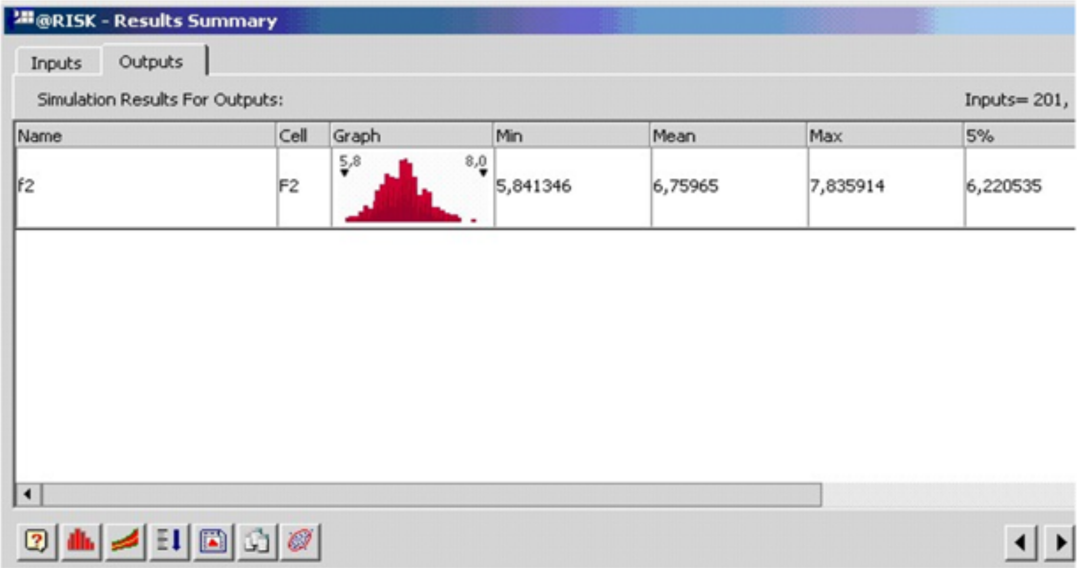


Рис. 9. Статистичні характеристики моделі з нормально розподіленим часом надходження завдання з параметрами 0,5 і 0,3

Отже, не дивлячись на те, що базова модель не повністю підходить для опису даної ситуації, вона допомогла нам розробити власну модель і знайти розв’язок, застосувавши імітаційне моделювання на основі електронних таблиць. На рис. 10. показана гістограма часу виконання замовлення у випадку експоненціально розподіленого часу між надходженнями завдань з параметром 0,5.

Отже, у роботі на основі моделі черги зі скінченним джерелом завдань ми визначили оптимальну кількість робітників, що обслуговують електронне обладнання страхової компанії.

За допомогою імітаційної моделі черг було визначено середній час, необхідний для опрацювання 100 однорідних документів, що дозволить правильно підібрати кількість персоналу і комп’ютерної техніки, а також дозволить точніше прогнозувати терміни виконання певних обсягів роботи.

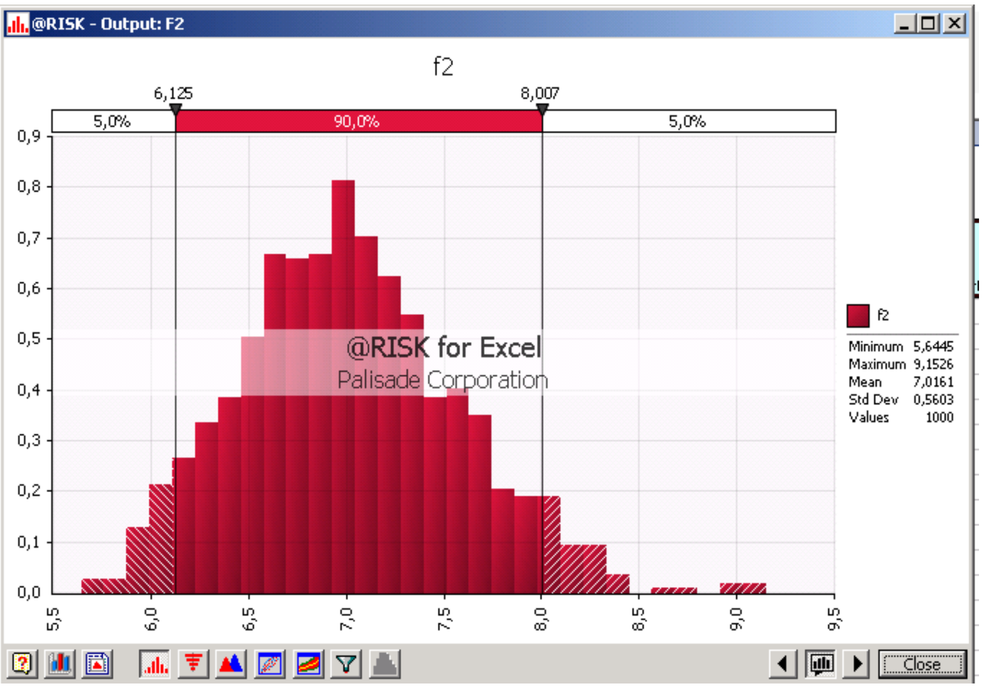


Рис. 10. Гістограма часу виконання замовлення у випадку експоненціально розподіленого часу між надходженнями завдань з параметром 0,5

Також, у роботі ми дійшли висновку, що якщо керівництво середньостатистичної страхової компанії вирішить встановити 10 телефонних ліній, то у 70-80 випадках із ста можна бути вільно додзвонитися. Якщо керівництво організації не задовольняє рішення, яке грунтується на виборі прийнятного значення ймовірності повної зайнятості системи, воно може визначити вартість кожного втраченого дзвінка і вирішити, скільки необхідно телефонних ліній, щоб сподівана вартість була мінімальною.

Література

1. Страхування: Підручник / За ред. В.Д. Базилевича. С83 К. : Знання, 2008. 1019 с. URL: https://shron1.chtyvo.org.ua/Bazylevych_Viktor/Strakhuvannia.pdf
2. Волошин В.В. Призначення і розвиток актуарних розрахунків. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». 2007. С. 61-65. URL: https://vlp.com.ua/files/11_31.pdf

3. Хемди А. Введення в дослідження операцій, 7-е видання. : Пер. з англ. М. : Видавничий дім «Вільямс». 2005. 912 с.