Математико-економічні моделі

УДК 330.4

Рисцов Ігор Костянтинович
доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри економічної кібернетики
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Rystsov Igor
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
ORCID: 000-0001-6002-0503

ПРО ПРОДУКТИВНІСТЬ МАТРИЦІ В МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА
ABOUT PRODUCTIVE MATRIX IN LEONT'EV'S MODEL

Анотація. *Статична модель Леонтьєва "затрати-випуск" є основною моделлю міжгалузевого балансу, яка використовується у державних статистичних органах багатьох країн, у тому числі й в Україні. В основі цієї моделі знаходиться принцип балансу, тобто принцип міжгалузевої рівноваги наявних матеріальних, трудових, фінансових та інших ресурсів та потреби в них. В моделі Леонтьєва вважається, що кожна галузь виробляє тільки один від товару. Під балансовою моделлю розуміють систему рівнянь, кожне з яких виражає рівновагу між випущеною галуззю продукцією та сукупною потребою в ній. За такого підходу економіка складається з економічних агентів, кожен з яких випускає деякий продукт, одна частина якого споживається іншими агентами, а друга – виводиться за межі системи як кінцеве споживання. Якщо замість поняття продукт ввести більш загальне поняття ресурс, то* *в модель Леонтьєва можна включити також природні ресурси, таки як земельні, лісні, мінеральні і т. д.*

Центральну роль в моделі Леонтьєва відведено матриці технологічних коефіцієнтів або технологічній матриці (матриці прямих витрат). Якщо ця матриця продуктивна, то економічна система буде мати тільки одне стійке положення рівноваги, тому питання продуктивності технологічної матриці є одним з основних в цей моделі. В статті доведено теорему про необхідні та достатні умови продуктивності технологічної матриці в моделі Леонтьєва. Окремі фрагменти цієї теореми вже зустрічались в науково-педагогічній літературі, але в цілому цю теорему та метод її доведення можна вважати новими.

В подальших дослідженнях можна розглядати динамічну або відкриту модель Леонтьєва, коли досліджується не тільки положення рівноваги, а і шлях до нього. За допомогою цієї моделі можна розкривати приховане виробництво, прихований промисловий попит і приховане кінцеве споживання.

Ключові слова: *Модель Леонтьєва, матриця прямих витрат, продуктивність технологічної матриці.*

Summary. *Leont'ev's static model (input-output model) is the main inter-sectoral balance model, which is used in government statistical divisions of many countries, including Ukraine. At the base of this model is the principle of balance, i.e. the principle of inter-sectoral balance of available material, labor, financial and other resources and the need for them. In Leont'ev's model, it is supposed that each industry domain produces only one kind of goods. The balance model is a system of equations, each of which expresses the balance between the output of the industry domain and the total need for it. In this approach, the economic system consists of economic agents, each of which produces a product, one part* *of which is consumed by other agents, and the other is taken out of the system as final consumption. If instead of the concept of product to introduce a more general concept of resource, in Leont'ev's model can be also included natural resources, such as land, forest, mineral, etc.*

The central role in Leont'ev's model is assigned to the matrix of technological coefficients or technological matrix (matrix of direct costs). If this matrix is productive, then the economic system will have only one stable equilibrium position, so the issue of productivity of the technological matrix is one of the main in this model. In this paper is proved the theorem on the necessary and sufficient conditions for the productivity of the technological matrix in Leont'ev's model. Some fragments of this theorem have already been published in the scientific and pedagogical literature, but in general, this theorem and the method of its proving can be considered as new.

In further research, we can consider a dynamic or open Leont'ev's model, when we study not only the position of equilibrium, but also the path to it. With this model, you can reveal hidden production, hidden industrial demand and hidden final consumption.

Key words: *Leont'ev's model, technological matrix, productivity of technological matrix.*

Постановка проблеми. Модель Леонтьєва (або Леонтьєва-Форда) можна подати у вигляді наступного матричного рівняння [1; 2]:

$$x = x \cdot A + y \tag{1}$$

де x – вектор валового випуску товарів у m галузях, A – квадратна технологічна матриця розміру $m \times m$, y – вектор споживання довжини m.

Суть методу Леонтьєва полягає у знаходженні вектора x за заданим вектором споживання y. Звичайно, рівняння (1) дозволяє вирішити і обернену задачу, тобто знайти вектор y по заданому x за допомогою прямого обчислення $y = x - x \cdot A$.

Матричне рівняння (1) є системою m лінійних рівнянь із m невідомими x_i, $1 \leq i \leq m$, де x_i – компоненти вектора x. Позначимо як I одиничну матрицю розміру $m \times m$, тоді систему (1) можна подати у такому вигляді:

$$x \cdot (I - A) = y \tag{2}$$

де точкою позначено матричне множення, яке в даному випадку має вигляд добутку вектору-рядка на матрицю. З рівності (2) видно, що система рівнянь (1) матиме рішення за будь-якого вектору y тоді і тільки тоді, коли матриця $I - A$ має обернену. Тому надалі будемо вважати матрицю $I - A$ невиродженою і позначимо як $B = (I - A)^{-1}$ зворотну для неї матрицю. У моделі Леонтьєва матриця B називається матрицею повних витрат. У цьому випадку система рівнянь (1) та еквівалентна їй система (2) матимуть єдине рішення, яке визначається формулою:

$$x = y \cdot (I - A)^{-1} = y \cdot B \tag{3}$$

Нагадаємо, що вектор або матриця називаються невід'ємними, якщо усі їх компоненти є невід'ємними. Щоб рішення (3) мало економічний зміст, воно має бути невід'ємним за будь-якого $y \geq 0$. Тому на матрицю A накладають ще одне обмеження.

Означення 1. Матриця $A \geq 0$ називається продуктивною, якщо матриця $B = (I - A)^{-1}$ є невід'ємною.

Таким чином, у разі продуктивності матриці A рішення (3) буде невід'ємним за будь-якого вектора $y \geq 0$. Спектральним радіусом $\rho(A)$ матриці A називається найбільший модуль її власних значень:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i| \tag{4}$$

Метою статті є доведення наступної важливої теореми.

Теорема 1. Матриця A буде продуктивною тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні рівносильні умови:

(1) матриця A є стійкою;

(2) спектральний радіус матриці A менше одиниці.

Аналіз досліджень і публікацій. Окремі фрагменти цієї теореми можна зустріти в науково-педагогічної літературі. Наприклад, у більшості підручників з математичної економіки і дослідження операцій наводяться лише достатні умови продуктивності матриці і часто без жодних пояснень та доказів [3]. Доведення умови (2) цієї теореми можна знайти в [4; 5], але воно спирається на теорему Перона-Фробеніуса, для доказу якої потрібен великий екскурс у теорію матриць [6]. Крім того, теорема Перона-Фробеніуса вірна лише для нерозкладних матриць, у той час як технологічна матриця у моделі Леонтьєва може бути розкладною, якщо з'являється група галузей, яка ізольована від інших галузей. Таким чином, теорему 1 та її доведення можна вважати новими.

Виклад основного матеріалу. Доведення теореми 1 розділимо на дві частини, але при цьому так чи інакше доводиться використовувати ряд результатів з лінійної алгебри та математичного аналізу. Нагадаємо, що збіжність у просторах векторів та матриць визначається за допомогою евклідової норми і ця збіжність рівносильна збіжності за компонентами. Іншими словами, умова $A_n \to B$ при $n \to \infty$ означає, що всі елементи $a_{ij}(n)$ матриці A_n сходяться до відповідних елементів b_{ij} матриці B як звичайні числові послідовності. Матрицю A назвемо стійкою, якщо $A^n \to 0$ при $n \to \infty$, де нулем позначено нульову матрицю розміру $m \times m$.

Лема 2. Невід'ємна матриця A буде продуктивною тоді і тільки тоді, коли вона стійка і у цьому разі буде виконуватися рівність:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \qquad (5)$$

Доведення. Нехай матриця $A \geq 0$ є продуктивною, тоді розглянемо таку матричну тотожність, яка справедлива для всіх натуральних чисел n:

$$(I - A) \cdot (I + A + \cdots + A^{n-1}) = I - A^n \qquad (6)$$

Помножимо обидві частини тотожності (6) зліва на матрицю $B = (I - A)^{-1}$, тоді отримаємо таку рівність:

$$I + A + \dots + A^{n-1} = B - B \cdot A^n \,. \tag{7}$$

Звідси випливає нерівність $I + A + \dots + A^{n-1} \le B$ для усіх $n \ge 1$, оскільки $B \cdot A^n \ge 0$. Тоді з теореми Вейерштрасса про збіжність неспадної обмеженої послідовності слідує збіжність матричного ряду $I + A + \dots + A^n + \cdots$. Звідси й із необхідної умови збіжності ряду слідує, що $A^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, матриця A буде стійкою, тоді переходячи до границі при $n \to \infty$ в обох частинах рівності (7), отримуємо рівність (5).

Зворотне міркування проводиться аналогічно. Нехай матриця A є стійкою, тоді $(I - A^n) \to I$ при $n \to \infty$. Оскільки детермінант є неперервною функцією матриці, то $\det(I - A^n) \to 1$ при $n \to \infty$, і значить при досить великому числі n матриця $I - A^n$ буде невиродженою. Звідси і з тотожності (6) заключаємо, що $\det(I - A) \ne 0$, тому що при множенні матриць визначники перемножуються. Отже, матриця $I - A$ має обернену і нехай $B = (I - A)^{-1}$. Далі, помножимо тотожність (6) ліворуч на матрицю B, тоді отримуємо рівність (7). Далі, переходячи до границі при $n \to \infty$ в обох частинах рівності (7), отримуємо рівність (5). Оскільки $A \ge 0$, то $B \ge 0$, отже матриця A буде продуктивною і лема доведена.

Ряд в правий частині рівності (5) називається рядом Неймана матриці A. З рівностей (3) і (5) отримуємо наступну формулу для розв'язку системи (1):

$$x = y \cdot B = y \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right) \tag{8}$$

Таким чином, у разі продуктивної матриці A розв'язок (8) можна шукати ітераційним методом. Позначимо як $\| v \|$ евклідову норму вектору v.

Лема 3. Матриця A буде стійкою тоді і тільки і тоді, коли $\rho(A) < 1$.

Доведення. Нехай A – стійка матриця, тоді для будь-якого вектора-стовпця v довжини m виконуватиметься умова:

$$A^n \cdot v \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{9}$$

Припустимо протилежне, що у матриці A є власне значення λ, модуль якого не менше одиниці $|\lambda| \geq 1$. Тоді для власного ненульового вектора v, що відповідає власному значенню λ, будуть виконуватися такі умови для всіх n:

$$\| A^n \cdot v \| = \| \lambda^n \cdot v \| = |\lambda|^n \cdot \| v \| \geq \| v \| > 0$$

Але ця умова явно суперечить умові (9). Тому $\rho(A) < 1$ і необхідність доведена.

Припустимо, що $\rho(A) < 1$. Як відомо з теорії матриць [3], матриця A подібна до жорданової матриці $J(A)$, тобто матриці, що є прямою сумою жорданових клітин (жорданова блочно-діагональна форма матриці):

$$J(A) = J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_k) \tag{10}$$

де $\lambda_i,\ 1 \leq i \leq k$, - власні значення матриці A, а число k дорівнює розмірності підпростору, породженого власними векторами матриці A. Кожна клітина $J(\lambda_i)$ розміру $m_i \times m_i$ має вигляд:

$$J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

причому $m_1 + \cdots + m_k = m$. Пряме обчислення показує, що матриця $J(\lambda_i)^n$ буде верхньо-трикутною матрицею та її елементи, які розташовані на j-ой діагоналі після головної діагоналі, мають вигляд $C_n^j \cdot \lambda_i^{n-j}$, де C_n^j, $0 \leq j \leq m_i - 1$, – біноміальні коефіцієнти. Далі, маємо нерівності:

$$|C_n^j \cdot \lambda_i^{n-j}| \leq n^j \cdot |\lambda_i|^{n-j}, \qquad 0 \leq j \leq m_i - 1 \tag{11}$$

Оскільки $|\lambda_i| < 1$, то експонента $|\lambda_i|^{n-j}$ зменшується швидше, ніж зростає поліном n^j, тому $n^j \cdot |\lambda_i|^{n-j} \to 0$ при $n \to \infty$, для всіх $0 \leq j \leq m_i - 1$. Тоді із (11) випливає, що $J(\lambda_i)^n \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $1 \leq i \leq k$. Звідси та із

(10) заключаємо, що $J(A)^n \to 0$ при $n \to \infty$, так як при возведенні в ступінь блочно-діагональної матриці її блоки також возводяться на той же ступінь, тобто $J(A)^n = J(\lambda_1)^n \oplus \cdots \oplus J(\lambda_k)^n$ для усіх $n \geq 1$. Залишається помітити, що матриці A і $J(A)$ подібні, тобто $A = C \cdot J(A) \cdot C^{-1}$, де C – невироджена матриця. Тоді $A^n = C \cdot J(A)^n \cdot C^{-1}$ для всіх $n \geq 1$, отже, з умови $J(A)^n \to 0$ заключаємо, що $A^n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, матриця A буде стійкою і лема доведена.

З леми 2 і леми 3 очевидно випливає теорема 1. Зауважимо, що умова $A \geq 0$ використовувалася тільки в лемі 2, а лема 3 вірна для всіх матриць, тому її можна розглядати як аналог критерію стійкості Рауса-Гурвіца для лінійних дискретних динамічних систем [7].

Інший шлях доведення леми 3 полягає у використанні фробеніусової нормальної форми матриці (перша нормальна форма) замість жорданової нормальної форми (друга нормальна форма) [6]. Але при цьому доводиться використовувати теорію лінійних рекурентних співвідношень, що, звісно, збільшує доведення. Тому цей підхід доцільний, коли лема 3 доводиться після викладу теорії лінійних рекурентних співвідношень і в цьому випадку вона виходить як простий наслідок цієї теорії із залученням фробеніусової нормальної форми матриці [7].

Висновки та застосування. Звичайно, перевірити умову стійкості матриці A або умову $\rho(A) < 1$ непросто для великих матриць. Крім того, ці умови носять суто математичний характер, тому багато авторів намагаються знайти достатні умови продуктивності матриці, які легко перевіряються та мають економічний зміст. Найчастіше для цього використовуються рядкові суми елементів матриці A.

Нагадаємо, що матриця A називається нерозкладною, якщо її орієнтований граф є сильно зв'язним, тобто між будь-якими двома його вершинами існує певний шлях. Позначимо через $r(A)$ мінімум рядкових сум елементів матриці A, а через $R(A)$ максимум цих сум. Далі, нехай A –

невід'ємна нерозкладна матриця, тоді для її спектрального радіусу $\rho(A)$ вірна наступна альтернатива [8]:

$$r(A) = \rho(A) = R(A) \text{ або } r(A) < \rho(A) < R(A) \qquad (12)$$

Тоді з теореми 1 і альтернативи (12) отримуємо наступну достатню умову продуктивності матриці A.

Наслідок 4. Невід'ємна нерозкладна матриця A буде продуктивною, якщо $r(A) < 1$ і $R(A) \leq 1$.

Розглянемо економічний зміст цієї умови. У моделі Леонтьєва технологічну матрицю A називають також матрицею прямих витрат, так як елемент a_{ij} цієї матриці дорівнює кількості продукції j-ої галузі (у грошах), яку i-я галузь повинна придбати, щоб зробити товару на одну грошову одиницю. Позначимо як $r_i(A)$ суму елементів в i-му рядку матриці A, тоді $r_i(A)$ дорівнює загальній сумі затрат i-ої галузі, які їй необхідно витратити, щоб зробити товару на 1 грошову одиницю. Тому можна назвати i-ю галузь прибутковою, якщо $r_i(A) < 1$ і незбитковою, якщо $r_i(A) \leq 1$. Отже, умова $r(A) < 1$ і $R(A) \leq 1$ означає, що всі галузі в моделі Леонтьєва незбиткові, та існує, принаймні, одна прибуткова галузь.

Література

1. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. Москва: Издательство «Экономика», 1997. 479 с.
2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. Тернопіль: Богдан, 2006. 304 с.
3. Дзюбан І.Ю., Жиров О.Л., Охріменко М.Г. Дослідження операцій. Київ: Політехніка, 2005. 108 с.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика. Москва: Юнити, 2002. 399 с.
5. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Москва: Юнити, 2005. 295 с.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Физматлит, 2004. 560 с.
7. Рисцов І.К., Сокульський О.Є. Теорія автоматів в моделюванні економіки. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 89 с.
8. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. Москва: Наука, 1984. 320 с.

References

1. Leont'ev V.V. Mezhotraslevaya ekonomika. Moskva: Izdatelstvo «Ekonomika», 1997. 479 s.
2. Ljashenko I.M., Korobova M.V., Stoljar A.M. Osnovy matematychnogho modeljuvannja ekonomichnykh, ekologhichnykh ta socialjnykh procesiv. Ternopilj: Boghdan, 2006. 304 s.
3. Dzjuban I.J., Zhyrov O.L., Okhrimenko M. G. Doslidzhennja operacij. Kyjiv: Politekhnika, 2005. 108 s.
4. Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika. Moskva: Yuniti, 2002. 399 s.
5. Kolemaev V.A. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie. Moskva: Yuniti, 2005. 295 s.
6. Gantmakher F.R. Teoriya matrits. Moskva: Fizmatlit, 2004. 560 s.
7. Rystsov I.K., Sokuljsjkyj O.J. Teorija avtomativ v modeljuvanni ekonomiky. Kyjiv: NTUU «KPI», 2016. 89 s.
8. Voevodin V.V., Kuznetsov Y.A. Matritsy i vychisleniya. Moskva: Nauka, 1984. 320 s.