Педагогічні науки

УДК 37.091.398

Жумік Оксана Василівна
кандидат фізико-математичних наук
Львівський національний університет імені Івана Франка
Жумик Оксана Васильевна
кандидат физико-математических наук
Львовский национальный университет имени Ивана Франко
Zhumik Oksana
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Ivan Franko National University of Lviv

ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

APPLICATION OF THE GRAPHICAL METHOD IN SOLVING PROBLEMS WITH A PARAMETER

Анотація. *Розв'язування задач з параметром графічним методом є одним з методів, який часто викликає певні труднощі у учнів, котрі зумовлені невмінням побудувати графіки рівнянь чи зобразити множини розв'язків нерівностей та інтерпретувати результати, отримані графічно у аналітичній формі, розглянути все можливі випадки та зробити правильні висновки.*

У статті розглянуто особливості застосування графічного методу до розв'язування рівнянь, систем рівнянь та нерівностей з параметром, якому в школі приділяють мало уваги. Наведено декілька підходів та обгрунтовано доцільність їх використання у кожному випадку.

Ключові слова: *графічний метод, рівняння з параметром, нерівність з параметром, система рівнянь та нерівностей з параметром.*

Аннотация. *Решение задач с параметром графическим методом является одним из методов, часто вызывающих определенные трудности у учащихся, которые обусловлены неумением построить графики уравнений или изобразить множество решений неравенств и интерпретировать результаты, полученные графически в аналитической форме, рассмотреть все возможные случаи и сделать правильные выводы.*

В статье рассмотрены особенности применения графического метода решения уравнений, систем уравнений и неравенств с параметром, которому в школе уделяют мало внимания. Приведены несколько подходов и обоснована целесообразность их использования в каждом случае.

Ключевые слова: *графический метод, уравнение с параметром, неравенство с параметром, систему уравнений и неравенств с параметром.*

Summary. *Solving problems with the parameter graphic method is one of the methods that often cause certain difficulties in students that are due to the inability to build graphs of the equations or depict many solutions of inequalities and interpret the results obtained graphically in an analytical form, consider all possible cases and draw the right conclusions.*

The article discusses the features of the application of the graphic method of solving equations, systems of equations and inequalities with the parameter, which is given little attention to the school. Several approaches are given and the feasibility of their use in each case is justified.

Key words: *graphical method, equation with parameter, inequality with parameter, system of equations and inequalities with parameter.*

До розв'язування завдань з параметром є декілька підходів: аналітичний метод, графічний метод (введення системи координат xOy та xOa), використання симетрій і монотонності, використання розташування коренів квадратного многочлена, використання функцій, залежних від параметра тощо. В деяких завданнях ці методи можна поєднувати.

Розв'язування задач з параметром графічним методом часто викликає певні труднощі у учнів, які зумовлені невмінням побудувати графіки рівнянь чи зобразити множини розв'язків нерівностей та інтерпретувати результати, отримані графічно у аналітичній формі, зробити правильні висновки. Розглянемо на прикладах різні підходи до розв'язування рівнянь, систем рівнянь та нерівностей графічним методом, обгрунтуємо доцільність використання цих підходів.

Приклад 1. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$\left|\frac{5}{x+1}-3\right| = ax + a - 2$$

має більше двох розв'язків на проміжку $(-1;+\infty)$.

Розв'язання: Розглянемо дві функції $f(x) = \left|\frac{5}{x+1}-3\right| + 2$ і $g(x) = ax + a$. Зобразимо графік функції $f(x)$. Після розкриття модуля отримаємо

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{5}{x+1}; x \in (-\infty; -1) \cup \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right) \\ -3 + \dfrac{5}{x+1}; x\epsilon \left(-1; \dfrac{2}{3}\right) \end{cases}.$$

Графіком функції $g(x)$ є пучок прямих, які проходять через точку (-1;0), крім вертикальної прямої. Кутовий коефіцієнт прямих рівний значенню параметра *a*. Якщо пряма, яка належить пучку, знаходиться між прямими m та n, не включаючи m та n, графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ перетинаються при $x \in (-1; +\infty)$ у більше, ніж двох точках і, тому, вихідне рівняння на цьому проміжку буде мати більше, ніж два розв’язки.

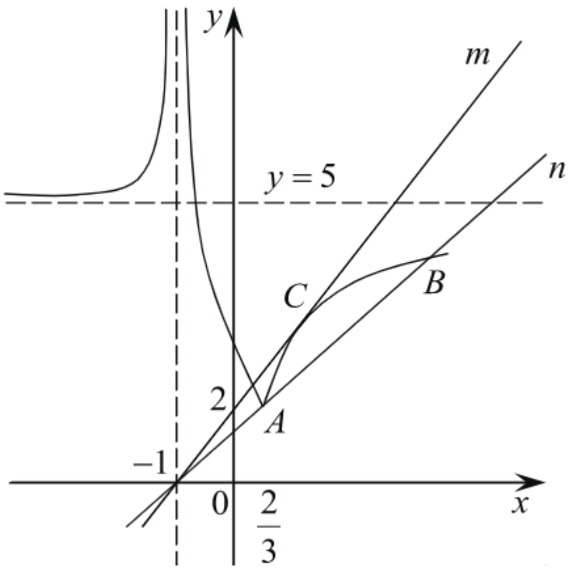

Рис. 1

Знайдемо кутові коефіцієнти прямих *m* та *n*. Пряма *n* проходить через точку $A\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. Значення параметра *a* для цієї прямої знайдемо, підставивши координати точки A у рівняння пучка прямих. Одержимо $a = \frac{6}{5}$. Зазначимо, що при $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ пряма $y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}$ ще раз перетинає графік функції $y = f(x)$ в точці $B\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. Пряма m є дотичною до графіка функції $y = f(x)$. Кутовий коефіцієнт прямої m знайдемо, визначивши, при якому значенні *a,* система рівнянь для знаходження координат точок перетину графіків функцій при $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ має єдиний розв’язок, тобто, єдиний розв’язок має рівняння $5 - \frac{5}{x+1} = ax + a$. Після перетворень отримаємо рівняння відносно $x + 1$: $a(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 5 = 0$. Очевидно, що у дотичної $a \neq 0$ тому, дане рівняння є квадратним і має диний розв’язок, коли дискримінант дорівнює нулю. $Д = 25 - 20a$ і рівний нулю при $a = \frac{5}{4}$. При знайденому значенні параметра *a* координати точки $C\left(1; \frac{5}{2}\right)$ і вона знаходиться між точками A та B. Отже, рівняння має більше двох розв’язків при $x \in (-1; +\infty)$, якщо $a \in \left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right)$.

Приклад 2. При яких значення параметра а рівняння $\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a}=0$ має рівно два різних розв'язки.

Розв'язання:

В системы координат xOa зобразимо графіки функцій $a=|4x|-x-3$ та $a=x^2-x$, всі точки яких перетворюють відповідно чисельник та знаменник рівняння в нуль. При фіксованому значенні параметра *a* розв'язками вихідного рівняння будуть перші координати точок перетину горизонтальної прямої *a=const* з графіком ламаної лінії, яка задається рівнянням $a=|4x|-x-3$, які не лежать на параболі $a=x^2-x$. Для того, щоб дане рівняння мало два різних розв'язки, потрібно, щоб таких точок було рівно дві.

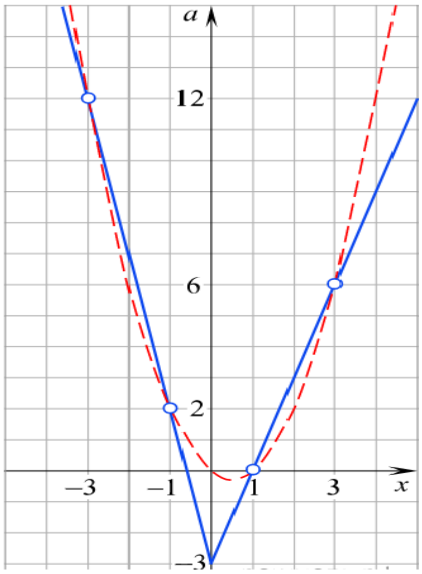

Рис. 2

Координати точок перетину графіків знайдемо, підставивши $a=x^2-x$ в рівняння $a=|4x|-x-3$, ординати точок перетину: 0, 2, 6, 12. З рис. 2 легко пачити, що при $a\in(-3;0)\cup(0;2)\cup(2;6)\cup(0;12)\cup(12;+\infty)$ вихідне рівняння має два різних розв'язки.

Приклад 3. Знайти всі значення параметра $a\in[-6;6]$, при яких розв'язком нерівності $(a+3)\cdot\big((x+1)(a+2)+3x\big)>0$ є будь-яке число $x\in[0;+\infty)$.

Розв'язання: Розглянемо систему координат aOx і зобразимо в ній область точок, які є розв'язками нерівності. Для цього, спочатку зобразимо лінії, які

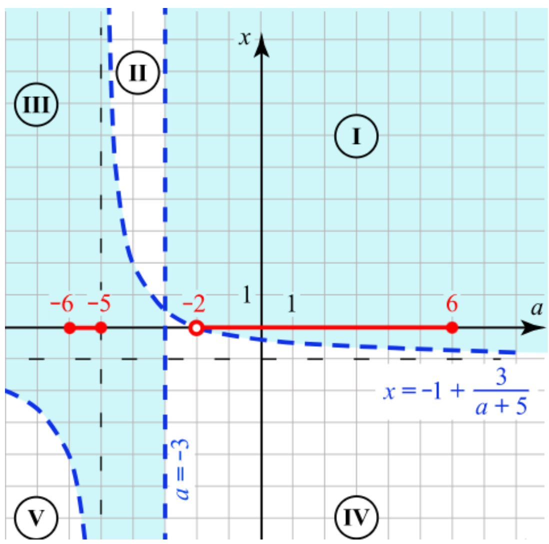

Рис. 3

обмежують дану область. Рівняння ліній отримаємо, прирівнявши ліву сторону нерівності до нуля: $a = -3; x = -1 + \frac{3}{a+5}$. Знайдені пряма та гіпербола (на рис. 3 зображені синіми пунктирними лініями) розбивають площину *aOx* на шість областей. В кожній області виберемо точку і, підставивши у вихідну нерівність, визначимо, чи задовольняють координати цієї точки нерівність. Якщо координати однієї точки області є розв'язком нерівності, то і всі точки області задовольняють нерівність. Після перевірки отримали, що перша і третя області, є областями, які зображують розв'язки нерівності. Для того, щоб будь-яке число $x \in [0; +\infty)$ було розв'язком нерівності, потрібно, щоб вертикальна пряма *a=const* ($a \in [-6; 6]$) перетинала область розв'язків по променю $x \in [0; +\infty)$. З рис. 3 видно що при $a \in [-6; -5] \cup (-2; 6]$ буде виконуватися умова завдання.

Приклад 4. Знайти всі значення параметра *a*, при яких розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} a + 3x \leq 12 \\ a + 4x \geq x^2 \\ a \leq x \end{cases}$ є відрізок довжиною два.

Розв'язання:

Зобразимо в системі координат хОа область розв'язків даної системи нерівностей. Для цього спочатку намалюємо лінії, які обмежують дану область. Рівняння ліній отримаємо, коли в кожній нерівності прирівняємо ліву і праву частини: $a = -3x + 12$; $a = x^2 - 4x$; $a = x$. Лінії розбивають координатну площину на вісім областей. Підставимо по одній точці з кожної області у систему нерівностей і визначимо, які з утворених областей зображують множину розв'язків системи. При фіксованому значенні параметра *a*

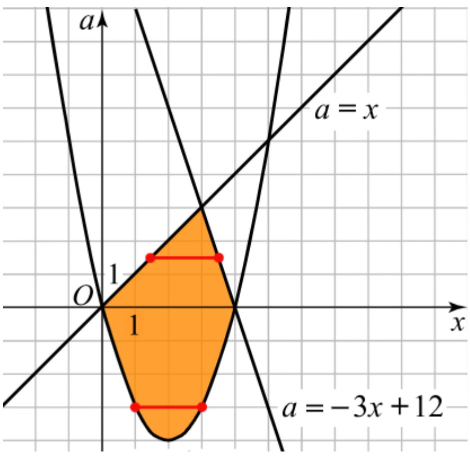

Рис. 4

розв’язками системи є перші координати точок відрізка горизонтальної прямої *a=const,* який належить області розв’язків системи. З рис.4 видно, що при $a = -3$ та $a = 1{,}5$ множиною розв’язків системи є відрізок довжиною два.

Приклад 5. Знайти всі значення параметра *a* при яких система

$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x) \le 0 \\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

має два розв’язки.

Розв’язання: Зобразимо у координатній площині xOy множину розв’язків нерівності. Область розв’язків обмежена лініями $y = 2x$ та $y = \frac{1}{2}x$. Точки з координатами (1; 1) та (-1; -1) задовольняють нерівність, тому множиною розв’язків є вертикальні кути, які знаходяться у першій та третій координатних чвертях. Графіком рівняння є коло з радіусом $\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ і центром у точці $(-a; a)$ якщо $a \neq -1$ і точка (1; -1) якщо $a = 1$. Для того, щоб система мала два розв’язки, потрібно, щоб коло і множина розв’язків нерівності мали дві спільних точки. Це відбудеться, коли коло буде дотикатися до прямих, що обмежують множину розв’язків нерівності, при чому, коло буде дотикатися обох прямих при одному і тому самому значенні параметра *a*, оскільки центр кола лежить на прямій $y = -x$, яка є бісектрисою вертикальних кутів. Значення параметра *a,* при якому коло буде дотикатися з прямими рівне значенню *a,* при якому система, яка складається з рівняння кола і рівняння однієї з прямих має єдиний

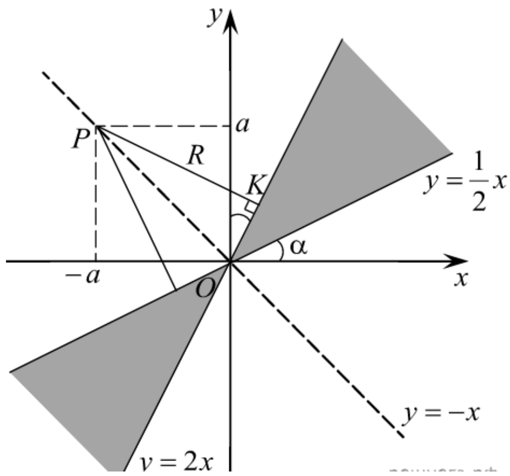

Рис. 5

розв'язок. При розв'язуванні системи прирівняємо дискримінант квадратного рівняння до нуля і отримаємо $a = -\frac{1}{4}; a = \frac{1}{a}$.

Отже, у статті розглянуто особливості застосування графічного методу до розв'язування задач з параметром, якому у школі приділяють мало уваги і який включено до програми ЗНО, наведено декілька нетривіальних підходів при застосуванні цього методу, обґрунтовано доцільність використання цих підходів. У школі графічний метод при розв'язуванні завдань з параметром корисно застосовувати для розвитку аналітичного мислення та уяви учнів, вміння аналітичний матеріал перетворювати в графічний і навпаки, для вироблення навиків знаходження правильного шляху до вирішення проблеми, аналізуючи при цьому все можливі випадки.

Література

1. URL: http://www.niss.gov.ua/articles/252/
2. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Начально-методичний посібник. Житомир: Вид-во «Рута», 2016. 468 с.