Physical and mathematical sciences

УДК 512.541

Жумік Оксана Василівна

кандидат фізико-математичних наук

Львівський національний університет імені Івана Франка

Жумик Оксана Васильевна

кандидат физико-математических наук

Львовский национальный университет имени Ивана Франко

Zhumik Oksana

Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Ivan Franko National University of Lviv

ФАКТОРНО ПОДІЛЬНІ АБЕЛЕВІ ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА СИСТЕМИ ФАКТОР-ГРУП

ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ АБЕЛЕВЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СИСТЕМЫ ФАКТОР-ГРУПП

FACTORIAL DIVISIBLE ABELIAN GROUPS WITH RESTRICTIONS ON SYSTEMS OF FACTOR GROUPS

Анотація. *Факторно подільні групи були введені Б'юмонтом і Пірсом для випадку груп без скруту в 1961 р. і узагальнені для всіх груп Уіклесом і А.А. Фоміним в 1998 р. У роботі вивчаються факторно подільні абелеві групи, фактор-група яких є факторно подільною групою рангу 1. Запропоновано досліджувати властивості таких груп за допомогою кохарактеристик та котипів. Отримано властивості кохарактеристик та котипів, а також знайдені достатні умови того, що нормальна підгрупа, фактор-група по якій є факторно подільною рангу 1 виділяється в факторно подільній групі прямим доданком, що сприяє подальшому вивченню будови груп.*

Ключові слова: *абелева група, факторно подільна абелева група, ранг.*

Аннотация. *Факторно делимые группы были введены Бьюмонтом и Пирсом для случая групп без кручения в 1961 г. и обобщены для всех групп Уиклеса и А.А. Фоминым в 1998 г. В работе изучаются факторно делимые абелевые группы, фактор-группа которых является факторно делимой группой ранга 1. Предложено исследовать свойства таких групп с помощью кохарактеристик и котипов. Получены свойства кохарактеристик и котипов, а также найдены достаточные условия того, что нормальная подгруппа, фактор-группа по которой является факторно делимой ранга 1, выделяется в факторно-делимой группе прямым слагаемым, что способствует дальнейшему изучению строения групп.*

Ключевые слова: *абелева группа, факторно делимая группа, группа без кручения, ранг.*

Summary. *Factorial divisible groups were introduced by Beaumont and Peirce for the case of torsion-free groups in 1961 and generalized to all groups by Wickles and A.A. Fomin in 1998. In this paper, we study quotient divisible Abelian groups whose quotient group is a quotient divisible group of rank 1. It is proposed to study the properties of such groups using cocharacteristics and cotypes. The properties of cocharacteristics and cotypes are obtained, and sufficient conditions are found for a normal subgroup whose quotient group is quotient divisible of rank 1 to be distinguished in a quotient divisible group as a direct summand, which contributes to further study of the structure of groups.*

Key words: *Abelian group, factorially divisible Abelian group, rank.*

Абелева група називається факторно подільною, якщо вона не містить ненульових періодичних подільних підгруп, але містить таку вільну підгрупу скінченного рангу, фактор-група по якій є періодичною подільною групою. Факторно подільні групи без кручення вперше були розглянуті в

1961 р. Р. Б'юмонтом і Р. Пірсом [2]. В 1998 г. в [3] А. А. Фомін і У. Уіклес розглянули змішані факторно подільні групи скінченного рангу. О.І. Давидова в [4] описала факторно подільні групи рангу 1 за допомогою кохарактеристик а також ендоморфізми цих груп.

Всі поняття і позначення стандартні і відповідають [1].

Означення 1. [4]. Для елемента a з групи A і простого числа p визначимо m_p як найменше ціле невід'ємне число, таке, що елемент $p^{m_p}a$ ділиться на будь-який степінь p в групі A. Якщо такого числа не існує, приймаємо, що $m_p = \infty$. Характеристика $\left(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots\right)$, де $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ – множина всіх простих чисел, називається кохарактеристикою елемента a в групі A і позначається $cochar(a)$. Тип, який містить характеристику (m_p), називається котипом елемента a і позначається $cotype(a)$. Будемо вважати, що дві кохарактеристики (m_p) і (k_p) рівними тоді і тільки тоді, коли $m_p = k_p$. Аналогічно $(m_p) \geq (k_p)$ тоді і тільки тоді, коли $m_p \geq k_p$. Введемо наступні покомпоненті операції:

$$\left(m_p\right) \wedge \left(k_p\right) = \left(\min\{m_p, k_p\}\right), \left(m_p\right) \vee \left(k_p\right) = \left(max\{m_p, k_p\}\right).$$

З означень очевидним чином слідують наступні властивості кохарактеристик і котипів.

1. Для будь-якого елемента a групи A $cochar(-a) = cochar(a)$.
2. Нехай $cochar(a) = \left(m_p\right)$. Якщо $m_{p_i} = 0$, то $cochar(p_i a) = cochar(a)$, тобто $cochar(p_i a) = \left(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_i} - 1, \dots\right)$ (приймаємо, що $\infty - 1 = \infty$).
3. Для будь-яких елементів b, c групи A $cochar(b + c) \leq cochar(b) \vee cochar(c)$
4. Для будь-якого гомоморфізму $f: A \to B$ і будь-якого $a \in A$ є справедливою нерівність $cochar_A(a) \geq cochar_B\left(f(A)\right)$.

5. Якщо $mb = nc$ для ненульових цілих m і n, то $cotype(b) = cotype(c)$.

Теорема. Нехай A – факторно подільна абелева група, A/B факторно подільна група рангу 1. Якщо кожен елемент $a \in A$ можна представити у вигляді $a = x + b$, де $b \in B$ і $cochar_A(x) \leq cochar(A/B)$, то B виділяється в A прямим доданком.

Доведення. Нехай $y + B$ – базисний елемент факторно подільної групи $C = A/B$ рангу 1, $y \notin B$. Згідно з умовою леми $y = x + b, b \in B$ і $cochar_A(x) \leq cochar(A/B)$. Елемент $x + b$ також є базисним елементом для A/B, оскільки будь який елемент $z + B$ групи A/B можна представити у вигляді:

$$z + B = m(y + B) = my + B = m(x + B) + B = mx + mb + B =$$

$$mx + B = m(x + B).$$

З того, що

$$cochar_C(x + B) \leq cochar_A(x)$$

(властивість 4 кохарактеристики) слідує, що

$$cochar_C(x + B) = cochar_A(x).$$

Згідно з теоремою 1 [4] існує єдиний гомоморфізм $g: C \to A$ такий, що

$$g(x + B) = x.$$

Якщо $y + B = m(x + B) = mx + B$, то $g(y + B) = g\big(m(x + B)\big) = mg(x + B) = mx$.

Розглянемо $\pi: A \to C$ – природний гомоморфізм, тоді $\pi \circ g - \mathbb{1}_C$ – ендоморфізм групи C рангу 1. Ядро

$$Ker(\pi \circ g - \mathbb{1}_C) \neq \{0\},$$

Доведемо це: $g(x+B)=x$; $\pi(x)=x+B$; $\mathbb{1}_C(x+B)=x+B$; $(\pi\circ g-\mathbb{1}_C)(x+B)=(x+B)-(x+B)=B=0_C$, тому $x+B\in Ker(\pi\circ g-\mathbb{1}_C)$ і тому $Ker(\pi\circ g-\mathbb{1}_C)\neq\{0\}$.

Образом базисного елемента $x+B$ групи С є 0_C. Тому, образи всіх інших елементів групи C також рівні 0_C . Отже, $\pi\circ g-\mathbb{1}_C$=0_C і $\pi\circ g=\mathbb{1}_C$. Образ групи $C\ -\ g(C)$ – нормальна підгрупа групи A. З того, що для будь-якого елемента a групи A,

$a=y+b, b\in B$; $y\notin B; y=mx+b_1$; $a=mx+b+b_1$,$mx\in g(C)$; $b+b_1\in B$

слідує, що $A=g(C)+B$. Перетин

$$g(C)\cap B=0_A,$$

оскільки, якщо $c\in g(C)$ і с $\in B$, то $c=mx\in B$. Звідси слідує, що с $=$ 0. Тому $A=g(C)\oplus B$, тобто, підгрупа B виділяється в групі А прямим доданком.

Отже, в роботі вивчено властивості кохарактеристик та котипів факторно подільних абелевих груп. Знайдено достатні умови того, що нормальна підгрупа, фактор-група по якій є факторно-подільною рангу 1 виділяється в факторно подільній групі прямим доданком, що дає можливість повністю вивчити будову таких груп.

Література

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974, 1977. Т. 1, 2.
2. Beaumont R., Pierce R. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5. P. 61-98.
3. Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126. P. 45-52.

4. Davydova O. I. Rank-1 quotient divisible groups // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. 2007. Vol. 13. No. 3. P. 25-33.