

Технічні науки

УДК 628.543

**Косова Віра Петрівна**

*асистент кафедри біотехніки та інженерії*

*Національний технічний університет України*

*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**Косова Вера Петровна**

*ассистент кафедры биотехники и инженерии*

*Национальный технический университет Украины*

*«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»*

**Kosova Vira**

*Assistant Department of Bioengineering and Biotechnics*

*National Technical University of Ukraine*

*"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*

**Андрук Микола Миколайович**

*магістр*

*Національного технічного університету України*

*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**Андрук Николай Николаевич**

*магистр*

*Национального технического университета Украины*

*«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»*

**Andruk Mykola**

*Student of Department of Bioengineering and Biotechnics*

*National Technical University of Ukraine*

*"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІКИ ТА  
МАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ЕКСТРАКЦІЇ БАВ З  
РОСЛИННОЇ СИРОВИНИ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И  
МАСООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЭКСТРАКЦИИ БАВ ИЗ  
РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ**

**MATHEMATICAL MODELING OF HYDRODYNAMICS AND MASS  
EXCHANGE PROCESSES DURING EXTRACTION OF  
BIOLOGICALLY ACTIVE SUBSTANCES FROM VEGETABLE RAW  
MATERIALS**

***Анотація.** Побудована математична модель руху рідини через шар подрібненої рослинної сировини в умовах перемішування з допомогою вібрації. Наочне представлення математичної моделі розподілення концентрації цільового продукту в екстрагенті.*

***Ключові слова:** математична модель, гідродинаміка, масообмін, екстрагент, цільовий продукт, рух рідини, екстракційне обладнання, інтенсифікації процесів.*

***Аннотация.** Построена математическая модель движения жидкости через слой измельченной растительного сырья в условия перемешивания с помощью вибрации. Наглядное представление математической модели распределения концентрации целевого продукта в экстрагенте.*

***Ключевые слова:** математическая модель, гидродинамика, массообмен, экстрагент, целевой продукт, движение жидкости, экстракционное оборудования, интенсификации процессов.*

***Summary.** A mathematical model of fluid motion through a layer of crushed vegetable raw materials under conditions of vibration mixing is*

*constructed. Visual representation of a mathematical model of the distribution of the concentration of the target product in the extractant.*

**Key words:** *mathematical model, hydrodynamics, mass transfer, extractant, target product, fluid motion, extraction equipment, process intensification.*

У фармацевтичній, харчовій, біотехнологічній галузях виробництва широко використовуються процеси екстракції цільових продуктів із сировини рослинного і тваринного походження. Масоперенос при екстракції цільових продуктів з рослинної сировини складається з процесу масовіддачі від поверхні матеріалу в екстрагенти, та переносу цільового продукту всередині матеріалу. Для інтенсифікації процесів екстракції цільового продукту з рослинної сировини запропоновані різноманітні конструкції екстрактерів: віброекстрактери, екстрактори з використанням кавітації, ультразвукових коливань, мікрохвильові екстрактори, екстрактори з комбінованим введенням енергії [1; 2].

На наш погляд найбільш перспективним є екстрактор з комбінованим введенням енергії від віброперемішуючого пристрою та генератора ультразвукових коливань. Інтенсивність проведення процесу екстракції залежить від гідродинаміки руху екстрагенту в екстракторі, поверхні масовіддачі, розподілу концентрацій цільового продукту в екстрагенті.

У більшості існуючих екстракторів для переробки сировини рослинного походження вилучення цільового продукту відбувається шляхом проходження екстрагенту через шар подрібненої сировини [3]. Для інтенсифікації процесу масовіддачі від поверхні сировини в екстрагент використовується віброперемішуючий пристрій [4], який створює режим знакоперемінного руху екстрагента в результаті якого руйнується приграничний шар і зменшується опір переносу цільового продукту.

Зважаючи на складний характер гідродинамічних та масообмінних процесів, що відбуваються в екстракторах з комбінованим введенням енергії в літературі практично відсутній їх математичний опис.

При проектуванні екстракційного обладнання та прогнозування ефективних режимів постає необхідність створити математичні моделі процесів гідродинаміки та масопереносу, що протікають в цьому обладнанні. Шар частинок твердого матеріалу розміщений на сітчастому дніщі корзини, що закріплено на штоку, який здійснює зворотно-поступальний рух у вертикальному циліндричному апараті, заповненому рідиною (екстрагентом) рис 1.

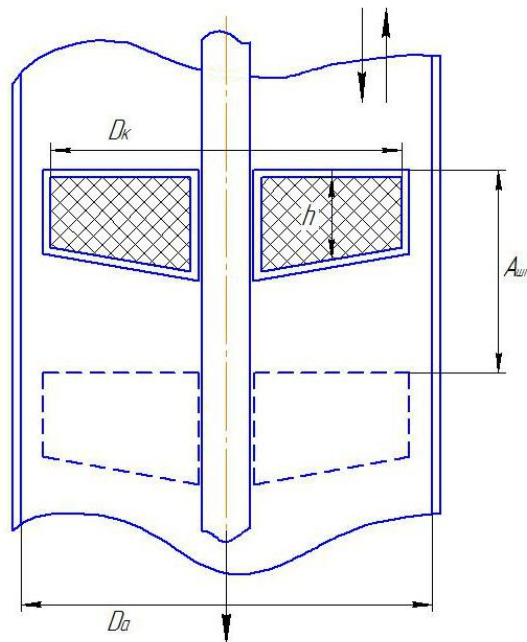


Рис. 1. Схема циліндричного вертикального апарату

У процесі руху штоку рідина проходить через шар твердих частинок і збагачується цільовим продуктом шляхом екстракції. Швидкість руху штоку змінюється за рівнянням:

$$W = W_{max} \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

Позначимо період руху штоку  $T$ , а частоту руху  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , тоді швидкість руху штоку:

$$W = W_{max} \cdot \sin(\omega t) \quad (2)$$

де  $W_{max}$  - максимальне значення, швидкості в процесі руху штоку.

Переміщення корзини в напрямку координати  $z$  в залежності від часу:

$$z = \frac{A_{um}}{2} (1 - \cos(\omega t)) \quad (3)$$

Швидкість переміщення корзини:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A_{um} \cdot \omega}{2} \sin(\omega t) \quad (4)$$

Оскільки швидкість корзини і штоку однакові:

$$W_{max} = \frac{A_{um} \cdot \pi}{T} \quad (5)$$

Якщо період руху штоку складає  $T$ , швидкість приймає максимальне значення за модулем при умові, що  $\sin \omega t = \pm 1$ .

Отже,

$$\begin{aligned} \omega t &= \frac{\pi}{2}, & t &= \frac{T}{4}, \\ \omega t &= \frac{3\pi}{2}, & t &= \frac{3T}{4}. \end{aligned}$$

Рух рідини через шар твердих частинок можна розглянути на основі моделі фільтрації при умові, що шар осаду сформований [5; 6].

Запишемо диференціальне рівняння, що описує зміну тиску в часі по висоті шару твердих частинок [5; 6]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \bar{b} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (6)$$

У початковий момент часу руху корзини з шаром твердих частинок розподілення тиску в шарі частинок можна виразити рівнянням:

$$P(z, 0) = P_1 \frac{z}{h} \quad (7)$$

Тиск на границях шару твердих частинок визначається з виразів:

$$P(0, t) = 0, \quad (8)$$

$$p(h, t) = P_1 + P_a \cdot \sin(\omega t). \quad (9)$$

Коефіцієнт  $\bar{b}$  - коефіцієнт, який характеризує проникність осаду та стискаємість осаду [5; 6], визначаємо за рівнянням:

$$\bar{b} = \frac{\bar{G}}{\mu \bar{r}},$$

$\bar{r}$  – середній питомий коефіцієнт опору осаду;  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості;  $\bar{G}$  – середній модуль стискаємість осаду.

У результаті розв'язку рівнянь (6)-(9) [5; 6] знайдені вирази для визначення витрати тиску при зворотно-поступальному русі рідини через шар твердих частинок:

$$P(z, t) = \left[ P_1 + P_a \sin(\omega t) \right] \frac{z}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8P_1 \exp\left[-\frac{\pi^2(2n-1)^2 \bar{b} t}{h^2}\right]}{\pi^3(2n-1)^3} - \frac{\frac{\pi^2 n^2 \bar{b} P_a}{h^2} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{2P_a \sin(\omega t)}{\pi n} (-1)^{n-1} - \frac{\frac{\pi^2 n^2 \omega \bar{b} P_a}{h^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n \bar{b} t}{h^2}\right)}{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2} \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) \quad (10)$$

При умові, що залежність перепаду тиску по висоті шару твердих часточок виникає тільки у результаті руху штоку  $P_1 = 0$ , а рівняння (10) приймає вигляд:

$$P(z, t) = \frac{z}{h} \cdot P_a \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2P_a \sin(\omega t)}{\pi n} (-1)^{n-1} - \frac{\frac{\pi^2 n^2 \bar{b} P_a}{h^2} \sin(\omega t - \varphi) - \frac{\frac{\pi^2 n^2 \omega \bar{b} P_a}{h^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n \bar{b} t}{h^2}\right)}{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2} \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega}{\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}}.$$

Для визначення швидкості рідини на виході з шару твердих частинок при умові зворотно-поступального руху штоку запишемо рівняння наведене в [1; 2].

$$W_{вих} = \frac{1}{\mu\bar{r}} \left\{ \frac{P_1 + P_a \sin(\omega t)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8P_1 \exp\left[\frac{\pi^2(2n-1)^2 \bar{b}t}{h^2}\right]}{h\pi^2(2n-1)^3} n - \frac{\frac{\pi^3 n^3 \bar{b} P_a}{h^3}}{\sqrt{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi_1) + \right. \\ \left. + \frac{2P_a \sin(\omega t)}{\pi n} (-1)^{n-1} - \frac{\frac{\pi^3 n^3 \omega \bar{b} P_a}{h^3}}{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}t}{h^2}\right) \right\} \quad (12)$$

За умови  $P_1=0$  рівняння перетворюється до виду:

$$W_{вих} = \frac{1}{\mu\bar{r}} \left\{ \frac{P_a \sin(\omega t)}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\frac{\pi^3 n^3 P_a}{h^3}}{\sqrt{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi_1) + \frac{2P_a \sin(\omega t)}{\pi n} (-1)^{n-1} + \frac{\frac{\pi^3 n^3 \omega \bar{b} P_a}{h^3}}{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}t}{h^2}\right) \right] \right\} \quad (13)$$

Максимальна за модулем швидкість рідини на виході з шару твердих часточок досягається при значенні  $t = \frac{3T}{4}$ , тобто при значеннях  $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} :$$

$$W_{вих} = \frac{1}{\mu\bar{r}} \left\{ \frac{P_a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\frac{\pi^3 n^3 P_a}{h^3}}{\sqrt{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) - \frac{2P_a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi n} (-1)^{n-1} + \frac{\frac{\pi^3 n^3 \omega \bar{b} P_a}{h^3}}{\left(\frac{\pi^2 n^2 \bar{b}}{h^2}\right)^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 \bar{b} \frac{T}{4}}{h^2}\right) \right] \right\} \quad (14)$$

Вирази (13)-(14) дозволяють встановити залежності між максимальною швидкістю.

При зворотно-поступальному русі корзини рідина проходить через шар твердих частинок збагачується цільовим продуктом. Поза шаром твердих частинок перенос цільового продукту в рідині відбувається за рахунок конвекції. Оскільки вектор руху рідини направлений переважно вздовж осі  $z$  -  $W_z$  рівняння конвективної дифузії приводиться до вигляду [5]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + W_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$z = 0, c = c_n, t = 0, c = f(z).$

Швидкість рідини  $W_z$  в перерізі апарату при переміщенні корзини на відстань  $dz$ . Знайдемо з формули:

$$W_z = \frac{dV_p}{F_a dt} = \frac{F_a dz}{F_a dt} = \frac{dz}{dt} \quad (16)$$

де  $dV_p = F_a dz$  – елементарний об'єм рідини що відповідає переміщенню корзини на відстань  $dz$ ;

$F_a = \frac{\pi D_a^2}{4}$  – площа перерізу апарату.

З урахуванням співвідношення (4):

$$W_z = \frac{A_{um}}{2} \omega \cdot \sin(\omega t) \quad (17)$$

Розв'язок рівняння (3.15) шукаємо у вигляді виразу [5]:

$$c(z, t) = c_1(t) + c_2(z) \quad (18)$$

Після підстановки виразу (18) в рівняння (15), враховуючи вираз (16) для швидкості  $W_z$  запишемо:

$$\frac{1}{\frac{A_{um}}{2} \omega \cdot \sin(\omega t)} \cdot \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = - \frac{\partial c_2(z)}{\partial z} = a$$

З огляду на те, що  $a$  – постійна величина:

$$c_1(t) = \frac{A_{um} \cdot a}{2} \omega \int_0^t \sin(\omega t) dt = - \frac{a A_{um}}{2} \cos(\omega t) + b_1 \quad (19)$$

$$c_2(z) = -az + b_2 \quad (20)$$

Вираз для визначення розподілення концентрації цільового продукту в рідині має вигляд:

$$c(z, t) = - \frac{a A_{um}}{2} \cos(\omega t) - az + b \quad (21)$$

Значення постійних інтегрування  $a$  і  $b$  знаходимо з системі рівнянь:



$$\begin{cases} c_n = -\frac{a \cdot A_{um}}{2} \cos(\omega t) + b \\ f(z) = -\frac{a \cdot A_{um}}{2} - az + b \end{cases},$$

$$a = \frac{c_n - f(z)}{z + \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t))}, \quad b = f(z) + \frac{c_n - f(z)}{z + \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t))} \cdot \left( \frac{A_{um}}{2} + z \right) \quad (22)$$

Остаточні вирази для визначення концентрації екстрагованої речовини в рідині:

$$c(z, t) = f(z) + \frac{[c_n - f(z)]}{z + \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t))} \left( \frac{A_{um}}{2} + z \right) - \frac{[c_n - f(z)]}{z + \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t))} \left( \frac{A_{um}}{2} \cdot \cos(\omega t) + z \right) \quad (23)$$

Після перетворень:

$$c(z, t) = f(z) + \frac{[c_n - f(z)] \cdot \left[ \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t)) \right]}{z + \frac{A_{um}}{2}(1 - \cos(\omega t))}. \quad (24)$$

Для успішного проектування екстракційного обладнання та прогнозування ефективних режимів його роботи постає завдання створення математичної моделі процесів гідродинаміки та масопереносу, що протікають обладнанні з перемішуванням. Побудована математична модель руху рідини через шар подрібненої рослинної сировини в умовах віброперемішування дає можливість оцінити процес і спрогнозувати результати.

### Література

1. Пономарев В.Д. Экстракция лекарственного сырья [Текст] / В.Д. Пономарев. М: Медицина, 1976. 202 с.
2. Зав'ялов В.Л. Розроблення високоефективної віброекстракційної літератури та перспективи її практичного використання [Текст] /В.Л. Зав'ялов, Т.Г. Мисюра, Н.В. Попова, В.Е. Деканський // Вібрації в техніці та технологіях, 2017. №2 (85). С. 81-94

3. Новицкий Б.Г. Применение акустических колебаний в химико-технологических процессах [Текст] / Б.Г. Новицкий. М: Химия, 1983. 192 с.
4. Беззубов А.Д. Ультразвук и его применение в пищевой промышленности [Текст] / А.Д. Беззубов, Е.И. Гарлинская, В.М. Фридман. М: Пищевая промышленность, 1964. 196 с.
5. Федоткин И.М. Математическое моделирование. Теория технологических процессов и их интенсификация [Текст] / И.М. Федоткин, И.С. Гулый. Киев: Арктур-А, 1998. 415 с.
6. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов [Текст] / И.М. Федоткин, И.Ю. Бурлай, Н.А. Рюмкин. К: Техника, 2004. 312 с.