

Технічні науки

УДК 621.3.013

Мошенський Ігор Віталійович

інженер

Мошенский Игорь Витальевич

инженер

Moshenskiy Igor

Engineer

**РОЗРАХУНОК МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРОСТИХ МАГНІТНИХ СИСТЕМ
РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПРОСТЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ
CALCULATION OF MAGNETIC FIELDS OF SIMPLE MAGNETIC
SYSTEMS**

***Анотація.** В даній статті зроблено теоретичні викладки та представлено результати чисельного розрахунку магнітних полів для простих магнітних систем, які складаються з замкненого магнітопроводу. Магнітний потік збуджується постійним електричним струмом, який пропускається по обмотці, навитій на магнітопровід. Результати розрахунків порівнюються з відомою теорією магнітних мереж.*

***Ключові слова:** магнітні поля, напруженість, ротор, дивергенція, метод контурних струмів, оператор Лапласа.*

***Аннотация.** В данной статье проделаны теоретические выкладки и представлены результаты численного расчета магнитных полей для простых магнитных систем, которые состоят из сплошного магнитопровода, в котором магнитный поток возбуждается постоянным электрическим током, пропускаемого по обмотке, навитой на магнитопровод. Результаты расчетов сравниваются с известной теорией магнитных сетей.*

Ключевые слова: магнитные поля, напряженность, ротор, дивергенция, метод контурных токов, оператор Лапласа.

Summary. In this article theoretical calculations are made and the results of practical calculations of magnetic fields for simple magnetic systems consisting of a closed magnetic circuit are presented. The magnetic flux is excited by a constant electric current, which is passed through a winding, wound on a magnet wire. The result of the calculations is compared with the known theory of magnetic networks.

Key words: magnetic fields, intensity, rotor, divergence, contour current method, Laplace operator.

Вступ. Конструкція таких приладів, як трансформатор, електродвигун, та інші зв'язана з наявністю в них магнітних полів. Перш, ніж виготовити цей прилад, повинен бути якісний розрахунок магнітного поля. В електротехніці та фізиці розрахунки магнітних полів займають важливе значення. В даній роботі також запропонований один із методів розрахунку магнітного поля, суть якого буде пояснена нижче.

Розгляд наукової літератури на задану тему показує, що розрахунки магнітних полів часто проводяться з допомогою введення такого показника, як векторний потенціал магнітного поля [2, с. 29]:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (1)$$

Магнітні поля описуються рівняннями Максвелла в наступному вигляді:

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

Використовуючи підстановку (1), отримуємо деяке спрощення рівнянь (2), тому що $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$ виконується завжди. Перетворимо рівняння (2):

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \text{div}(\text{grad} \vec{A}) \quad (3)$$

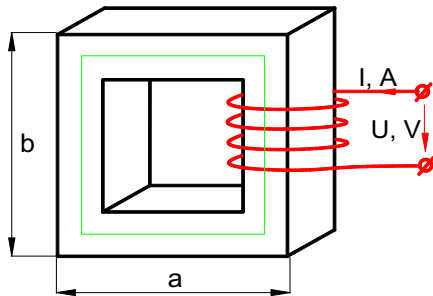
Так як для стаціонарного поля замкнених струмів $\text{div} \vec{A} = 0$, запишемо (3) в виді :

$$\nabla^2 \vec{A} = \text{div}(\text{grad} \vec{A}) = -\mu\mu_0 \vec{j}, \quad (4)$$

де $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Рівняння (4) можна програмувати чисельними методами на ЕВМ, наприклад, методом кінцевих різниць.

Також, для розрахунку магнітних полів використовується метод інтегральних рівнянь, згідно якого на межі між повітрям та феромагнітним середовищем поміщають умовні поверхневі струми, при цьому феромагнітне середовище умовно замінюють повітряним [4, с. 233].



Методологія досліджень. Візьмемо електромагніт з електротехнічної сталі квадратної або прямокутної форми з навитою на нього електричною котушкою (Рис. 1).

Рис. 1. Магнітопровід з котушкою

На котушку подана напруга U , за рахунок якої по ній протікатиме постійний струм I , що створить постійне магнітне поле всередині та зовні магнітопроводу. Магнітний потік буде зосереджений в середні магнітопроводу, а лише мала його частина – зовні, яка називається потоком розсіювання.

Магнітна проникність μ магнітопроводу велика, порядку декількох тисяч, а повітря - порядку одиниці. Розіб'ємо магнітопровід та повітряний простір на нескінченно малі резистори великої кількості (Рис. 2), які мають номінал :

$$dR_\mu = \frac{dl}{\mu\mu_0 \Delta S}, \quad (5)$$

де dl - нескінченно мала довжина резистора;

μ - магнітна проникність середовища ;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, Гн/м ; ΔS - поперечна площа резистору.

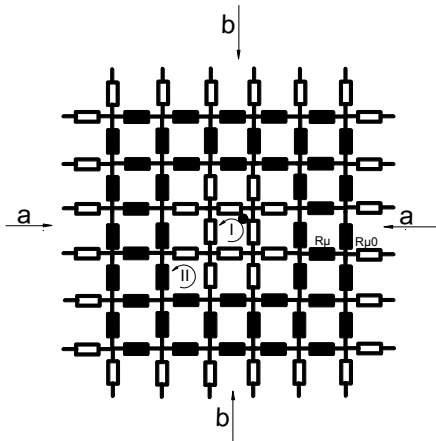


Рис. 2. Розбиття магнітопроводу та повітряного простору, що його оточує. Резистори світлого кольору-повітряний простір, темного-магнітопровід

На Рис. 2 резистори світлого кольору умовно означають повітряний простір, а темного- магнітопровід. В результаті отримуємо електричну мережу з відомими резисторами і ЕДС та невідомими струмами в вітках. Розрахувавши електричні струми в вітках контурів, згідно табл.1 здійснюємо перехід до магнітних величин. Джерелами ЕДС в даній схемі будуть ті контури, які пронизуються електричними провідниками, наприклад, контури I або II.

Формула (5) взята з виразу для закону повного струму:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} \approx \sum_i H_i \Delta l_i = \sum_i \mu \mu_0 H_i \Delta S \cdot \frac{\Delta l_i}{\mu \mu_0 \Delta S} = \sum_i B_i \Delta S \frac{\Delta l_i}{\mu \mu_0 \Delta S} = \sum_i \Delta \Phi_i \Delta R_i = \sum I, \quad (6)$$

Вираз (5) для магнітного опору має похому форму на вираз електричного опору - $dR_e = \rho \frac{dl}{\Delta S}$.

Взагалі, між електричними та магнітними мережами можливо встановити аналогічні величини, які представлено в Табл. 1.

Таблиця 1

Електрична величина	Магнітна величина
Електрична ЕДС, E	Магнітна МДС, $\sum I$
Електричний опір, Re	Магнітний опір, R _μ
Електричний струм, I	Магнітний потік, Φ
Електрична напруга, U=IRE	Магнітна напруга, U _μ =Φ R _μ

В результаті утворюється велика кількість контурів, по вітках якого протікають магнітні потоки, котрі потрібно визначити. До кожного з них можна використати закон повного струму. Ті контури, які пронизуються струмами, матимуть ЕДС, відмінну від нуля. Для розрахунку такої схеми використаємо метод контурних струмів із теорії лінійних кіл постійного струму, суть якого виражається системою рівнянь [1, с. 33]:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} - \dots - R_{1n}I_{nn} = \sum E_{1i}, \\ -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} - \dots - R_{2n}I_{nn} = \sum E_{2i}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -R_{n1}I_{11} - R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} = \sum E_{ni}, \end{cases} \quad (8)$$

де R_{ii} - власний опір контура, що дорівнює сумі опорів всіх віток контура.

$R_{ij} = R_{ji}$ - взаємний опір i -го та j -го контурів;

I_{jj} - контурний струм j -го контура;

$\sum E_{ji}$, - контурна ЕДС j -го контура, дорівнює сумі ЕДС всіх віток контура.

Якщо контур пронизується електричним провідником обмотки, то $\sum E_{ji} = \sum I$, інакше $\sum E_{ji} = 0$. Для даного розрахунку система рівнянь (8) переписеться в вигляді :

$$\begin{cases} R_{\mu 11}\Phi_{11} - R_{\mu 12}\Phi_{22} - \dots - R_{\mu 1n}\Phi_{nn} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -R_{\mu m1}\Phi_{11} + R_{\mu m2}\Phi_{22} - \dots - R_{\mu mn}\Phi_{nn} = \sum I, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -R_{n1}I_{11} - R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} = \sum E_{ni}, \end{cases} \quad (9)$$

де $R_{\mu ii}$ - власний магнітний опір i -го контура. Для контура I (Рис. 2) $R_{\mu ii} = 4R_{\mu 0}$, для контура II - $R_{\mu ii} = 2R_{\mu 0} + 2R_{\mu}$.

Φ_{jj} - контурний магнітний потік j -го контура ;

$\sum I$ - контурна МДС m -го контура. Провідник зі струмом буде розташований при розрахунках в I-му та II-му контурах (Рис. 2).

Систему рівнянь (9) програмуємо в середовищі Matlab 7, де є в наявності вбудовані процедури для розрахунків систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розраховуватись буде плоскопаралельний випадок в 2-вимірній системі координат. Джерелом магнітного поля, як вже обговорювалось вище, буде електричний провідник, який проходить тільки через один з контурів I або II (Рис.2). Поміщаємо провідник зі струмом в центрі, тобто в контурі I (Рис. 2). По перерізам а-а та b-b отримуємо графіки магнітної індукції (Рис. 3, 4).

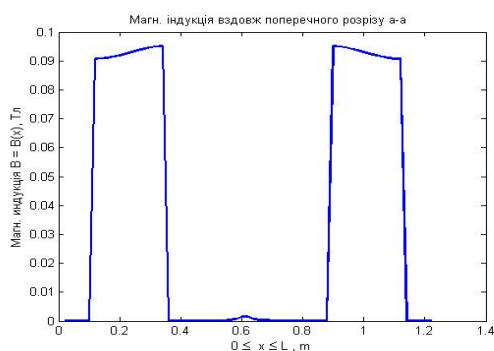


Рис. 3. Магнітна індукція вздовж розрізу а-а, в контурі I

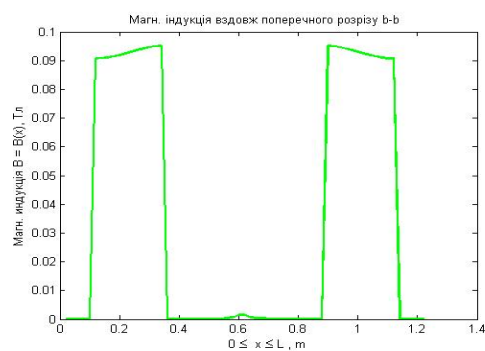


Рис. 4. Магн. індукція вздовж розрізу b-b, джерело в контурі I

Як бачимо з графіків магнітна індукція має одне й теж саме значення вздовж різних розрізів, тобто однакова по магнітопроводу, що підтверджує теоретичні викладки з теорії електротехніки по трансформаторам а дроселям з замкнутим магнітопроводом. По самому ж перерізу магнітна індукція має велике значення в магнітопроводі, та на порядки нижча в повітряному просторі всередині та зовні магнітопровода. В табл. 2 приведемо деякі числові значення даних обчислень.

Таблиця 2

Джерело в контурі I		Джерело в контурі II		Приміт.
а-а	б-б	а-а	б-б	
0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	Повітр. простір за магнітопроводом
0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	

0,09065	0,09065	0,09072	0,09072	магнітопровід
0,09364	0,09364	0,09365	0,09365	
0,09509	0,09509	0,09501	0,09501	
0,00006	0,00006	0,00003	0,00003	Повітр. простір всередині магнітопроводу
0,00007	0,00007	0,00001	0,00001	
0,09508	0,09508	0,09494	0,09494	магнітопровід
0,09363	0,09363	0,09350	0,09350	
0,09064	0,09064	0,09052	0,09052	
0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	Повітр. простір за магнітопроводом
0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	

Порівнюючи числові значення Табл.2, можна прийти до таких висновків:

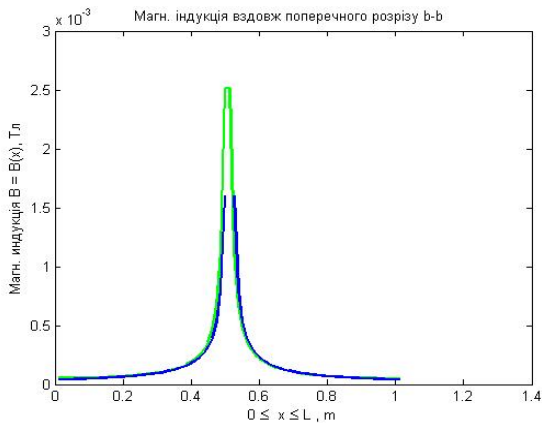
- при різних положеннях джерела значення магнітної індукції практично не змінюється в розрізах, тобто не залежить від положення джерела. Це відповідає закону повного струму, згідно якого циркуляція вектора напруженості залежить лиш від величини струму, пронизуючого контур і не залежить від положення струму.
- По перерізу самого магнітопроводу також залишається практично сталою величиною, як в теорії трансформатора, або дроселя. Різниця між числовими значеннями магнітної індукції на границях магнітопроводу в процентному співвідношенні на основі даних Табл.2:

$$\Delta\% = (0,09509 - 0,09065) / 0,09065 * 100\% = 4,9 \%. \text{ (Розріз а-а, джерело I).}$$

- Зробимо обхід магнітопроводу по його середній лінії і чисельно знайдемо середнє значення індукції магнітного поля по формулі $\langle B \rangle = \frac{1}{L_2 - L_1} \int_L B(L) dL$.

Це середня значення отримаємо з закону повного струму та порівняємо величини. Значення величин будуть: $\langle B \rangle = 0,0804$ Тл; $B_s = 0,0806$ Тл; $\Delta B = 0,25 \%$.

Зробимо ще один розрахунок, положивши при програмуванні значення магнітної проникності рівним $\mu = 1$ для всієї магнітної системи, не міняючи інших умов. Отримуємо графік на Рис. 5 зеленою лінією.



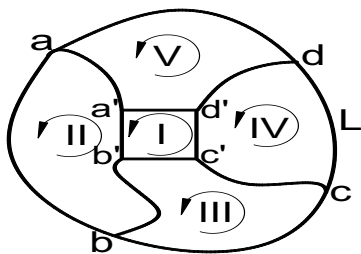
**Рис. 5. Графік магн. індукції при $\mu=1$.
Змінюється по гіперболічній залежності.
Зеленою лінією отримано графік чисельним
методом, а – синьою по формулі (10)**

Як відомо, для такої магнітної системи, коли провідник зі струмом знаходиться в повітряному просторі, напруженість та індукція магнітного поля будуть зменшуватись від центру провідника по наступній залежності:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B(r) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (10)$$

де r – відстань від центру провідника до точки вимірювання магн. поля.

Графіком буде гіпербола. Магнітна індукція буде однаковою по всьому колу радіуса r та мати напрямок по дотичній до кола. Графік залежності $B = B(r)$ на Рис. 5 представлений синьою лінією. Як видно, графіки знаходяться близько один від одного.



Виведемо деякі залежності. Звернемося до Рис. 6 та запишемо по II з. Кірхгофа рівняння контурів I, II, III, IV, V. При цьому припускаємо, що тільки контур I пронизаний провідниками з електричним струмом $\sum I$.

Рис. 6. Для виведення формули (14)

Всі контури складаються з багатьох віток, по яких протікають магнітні потоки.

$$\sum_{a'b'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{b'c'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{c'd'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{d'a'} \Phi_i R_{\mu i} = \sum I. \quad \text{Згідно формули (6), останню}$$

формулу запишемо у вигляді:

$$\sum_{a'b'c'd'} H_i \Delta l_i = \sum I \quad (11)$$

Далі для контурів II,III,IV,V послідовно :

$$\begin{aligned} \sum_{a'a} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{ab} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{bb'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{b'a} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \\ \sum_{bb'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{bc} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{c'c} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{c'b} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \\ \sum_{c'c} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{cd} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{d'd} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{d'c} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \\ \sum_{d'd} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{da} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{aa'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{a'd} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \end{aligned}$$

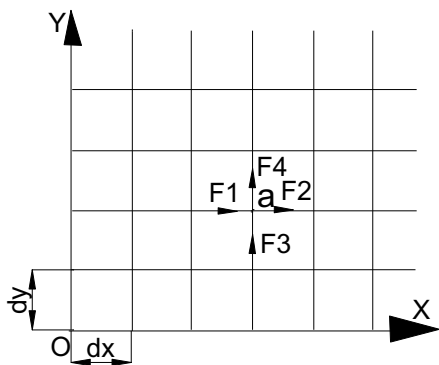
Де Φ_i та $R_{\mu i}$ - магнітні потоки та опори в вітках контурів, по яких іде обхід.

Сумуємо всі 4-рі останні рівняння при умовах :

$$\begin{aligned} \sum_{a'a} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{aa'} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \quad \sum_{c'c} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{cc'} \Phi_i R_{\mu i} = 0, \\ \sum_{bb'} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{bb'} \Phi_i R_{\mu i} &= 0, \quad \sum_{d'd} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{dd'} \Phi_i R_{\mu i} = 0. \quad \text{Також,} \\ \sum_{ab} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{bc} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{cd} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{da} \Phi_i R_{\mu i} &= \sum_L \Phi_i R_{\mu i} \\ \sum_{b'a} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{c'b} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{d'c} \Phi_i R_{\mu i} + \sum_{a'd} \Phi_i R_{\mu i} &= -\sum I, \text{ де } L - \text{довільна лінія обходу.} \end{aligned}$$

В результаті отримаємо :

$$\sum_L \Phi_i R_{\mu i} = \sum I. \quad (12)$$



Сума добутків зліва замінюється згідно формули (6) і в результаті :

$$\sum_L H_i \Delta l_i = \sum I \quad (13)$$

Тобто, обхід по довільній лінії L виконує закон повного струму, так само як він виконується і для контура I згідно формули (11).

Рис. 7. Для виведення формули (14)

Розглянемо площину, по якій протікають довільні магнітні потоки.

Розіб'ємо її на елементарні контури Δx на Δy , при цьому $\Delta x = \Delta y$ (Рис. 7).

Згідно I закону Кірхгофа для точки <a> запишем з урахуванням знаку кожного потоку:

$$\begin{aligned}\sum \Phi_i = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4 = (B_{1x} - B_{2x} + B_{1y} - B_{2y})\Delta S &= \left(-\frac{\partial B_x}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial B_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta S = \\ &= -\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta S = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Звідси,} \quad \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (14)$$

Таким чином, представлення простору згідно Рис. 2 зберігає основні закони електродинаміки Максвелла, що видно на основі отриманих формул (13), (14).

Висновки. Відмітимо те, що базова система рівнянь (9), по своїй суті схожа на систему рівнянь із методу кінцевих різниць :

$$4u_{i,k} - u_{i+1,k} - u_{i,k+1} - u_{i-1,k} - u_{i,k-1} = 0, \quad (15)$$

де функція u задовольняє рівняння Лапласа в 2-вимірному просторі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (i,k), (i+1,k), \dots - \text{вузли решітки, на яку розбивається 2-вимірна}$$

площина.

Метод контурних струмів взятий з теорії лінійних кіл і розраховує електричні струми в вітках контурів. Але магнітні потоки ведуть себе подібно електричним струмам в провідниках, лиш під дією не електричної, а магнітної м.д.с. Тому виявляється можливим цим методом розрахувати і магнітне поле. Переваги цього методу в тому, що він достатньо простий і має добре розвинену теорію. Основна система рівнянь (9) та її коефіцієнти знаходяться не складно. Також можна висловити припущення, що інші теореми лінійних кіл можливо використовувати для розрахунків магнітних полів.

Література

1. Основы теории цепей. Учебник для вузов. Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. 5-е изд., перераб. М.: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.
2. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. Пер с англ., М., «Энергия», 1970.
3. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Тозони О.В., Маергойз И.Д., «Техніка», 1974. 352 с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник для электротехнич., энерг., приборостроит. спец. вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. Шк., 1986. 263 с.: ил.