

Технические науки

УДК 539.3

Вовченко Николай Григорьевич

*кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов
Приднепровская Государственная академия
строительства и архитектуры*

Vovchenko Nikolay

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of
Structural Mechanics and Resistance of Materials
Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Варяничко Марина Александровна

*кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов
Приднепровская Государственная академия
строительства и архитектуры*

Varyanichko Marina

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of
Structural Mechanics and Resistance of Materials
Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Нагорный Дмитрий Валерьевич

*кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов
Приднепровская Государственная академия
строительства и архитектуры*

Nagorny Dmitry

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,

Associate Professor at the Department of

Structural Mechanics and Resistance of Materials

Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture

**ИДС ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ
ИТЕРАЦИОННОЙ ТЕОРИИ**

**THE INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE
PLATES AT THE BENDING USING NONCLASSICAL ITERATION
THEORY**

***Аннотация.** Построено решение задачи об изгибе пластины под действием локальной и синусоидальной нагрузок на основе итерационной теории, учитывающей все компоненты напряженно-деформированного состояния.*

***Ключевые слова:** пластина, напряженно-деформированное состояние, локальная нагрузка.*

***Summary.** The solution of the problem of the bending of a plate under the action of local and sinusoidal loads is proposed on the basis of an iterative theory that takes into account all the components of the stress-strain state.*

***Key words:** plate, stress-strain state; local loading.*

В настоящей работе при решении задачи использовались уравнения уточнённой теории [1], учитывающей поперечные деформации сдвига, нелинейный закон изменения напряжений по толщине. Зависимости между деформациями и перемещениями для трансверсально-изотропной пластины принимались в соответствии с известными соотношениями Коши.

Для получения основных соотношений, уравнений и условий на контуре использовалось вариационное уравнение Рейсснера.

$$\begin{aligned} & \iiint \left\langle \sigma_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_y \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_z \delta \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_{xz} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \sigma_{yz} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\sigma_{xz}}{G_3} \right) + \delta \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\sigma_{yz}}{G_3} \right) \delta \sigma_{yz} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{E_3} [\sigma_z - \nu_3 (\sigma_x + \sigma_y)] \right\} \delta \sigma_z \right\rangle dx dy dz - \\ & - \iint (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dF = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) x, y, z – составляющие поверхностных сил, F – площадь лицевых и боковых поверхностей пластины.

В [1] компоненты напряжений $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ и компоненты перемещений u, v, w принимались в виде рядов. Использовался метод разложений по толщинной координате с применением полиномов Лежандра.

$$\begin{aligned} u &= P_1 u_1(x, y) + P_3 u_3(x, y) (u \rightarrow v), \quad w = P_0 w_1(x, y) + P_2 w_3(x, y), \\ \sigma_{xz} &= (P_0 - P_2) Q_{1x}(x, y) / h + 3(P_2 - P_4) Q_{3x}(x, y) / (7h), \quad (x \rightarrow y) \\ \sigma_z &= (3P_1 / 5 - P_3 / 10) q(x, y) + 3(P_1 / 35 - 2P_3 / 45 + P_5 / 63) \omega_3(x, y) / 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $P_i(2z/h)$ – полиномы Лежандра, h – толщина пластины, $q(x, y)$ – поперечная нагрузка.

Функции $\omega_3(x, y), Q_{ix}, Q_{iy} (i=1,3)$ и все компоненты напряжений выражаются согласно [2] через перемещения $u_i(x, y), v_i(x, y), w_i(x, y), (i=1,3)$. Напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ удовлетворяют условиям на лицевых плоскостях пластины при $z = \pm 0,5h$: $\sigma_z = \pm 0,5q(x, y), \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

Все компоненты напряжений выражаются через перемещения [2].

Из вариационного уравнения (1) система уравнений равновесия пластин в перемещениях записывается в виде

$$A_1 u_1 - A_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \frac{Gh}{3} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + A_4 u_3 + A_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - A_6 \frac{\partial w_3}{\partial x} + A_7 \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$A_8 u_1 + A_9 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - A_{10} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \frac{Gh}{7} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} + A_{11} u_3 + A_{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial w_3}{\partial x} + A_{14} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$(x \rightarrow y, y \rightarrow x, u_1 \rightarrow v_1, \phi_3 \rightarrow -\phi_3);$$

$$A_{15}\varphi_1 + A_{16}\varphi_3 + A_{17}\nabla^2 w_1 - A_{18}\nabla^2 w_3 + q = 0; \quad (5)$$

$$A_{19}\varphi_1 + A_{20}\varphi_3 - A_{21}\nabla^2 w_1 - A_{22}w_3 + A_{23}\nabla^2 w_3 + A_{24}q = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\phi_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x}, \varphi_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad (i=1,3)$$

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D_1 = \frac{E\nu_3}{E_3(1-\nu)}, \quad D_2 = \frac{1}{E_3}(1-2\nu_3 D_1), \quad A_1 = \frac{56G_3}{15h}, \quad A_2 = \frac{E_0 h}{3} + \frac{11D_1^2 h}{70D_2},$$

$$A_4 = A_8 = \frac{2A_{12}}{h} = \frac{2A_{16}}{h} = \frac{12G_3}{5h}, \quad A_5 = A_{15} = \frac{28G_3}{15}, \quad A_6 = -A_{19} = \frac{2G_3}{15} + \frac{33D_1}{35D_2}, \quad A_7 = -\frac{2D_1 h}{21},$$

$$A_7 = -\frac{2D_1 h}{21}, \quad A_{12} = A_{16} = \frac{6G_3}{5}, \quad A_{10} = \frac{E_0 h}{7} + \frac{22D_1^2 h}{315D_2}, \quad A_{12} = A_{16} = \frac{6G_3}{5}, \quad A_3 = A_9 = \frac{11D_1^2 h}{105D_2}, \quad A_{11} = \frac{72G_3}{5h},$$

$$A_{14} = -\frac{D_1 h}{18},$$

$$A_{13} = A_{20} = \frac{6G_3}{5} + \frac{22D_1}{35D_2}, \quad A_{17} = \frac{14B_1}{15}, \quad A_{18} = A_{21} = \frac{B_1}{5}, \quad A_{22} = \frac{198}{35D_2 h}, \quad A_{23} = \frac{2B_1}{15}, \quad A_{24} = \frac{3}{7}, \quad B_1 = G_3 h.$$

Условия на контуре могут быть получены из (1).

$$\int \left[\left(\frac{2}{h} M_{1n} - M_{1n}^0 \right) \delta u_{1n} + \left(\frac{2}{h} M_{1s} - M_{1s}^0 \right) \delta u_{1s} + (M_{3n} - M_{3n}^0) \delta u_{3n} + (M_{3s} - M_{3s}^0) \delta u_{3s} + (Q_{1n} - Q_{1n}^0) \delta w_1 + \right. \\ \left. + (M_{3n} - M_{3n}^0) \delta u_{3n} + (M_{3s} - M_{3s}^0) \delta u_{3s} + (Q_{1n} - Q_{1n}^0) \delta w_1 + \left(\frac{3}{35} Q_{3n} - \frac{1}{5} Q_{1n} - Q_{3n}^0 \right) \delta w_3 \right] ds = 0,$$

где

$$M_{jn} = \int \sigma_n P_j \left(\frac{2z}{h} \right) dz, \quad M_{js} = \int \sigma_s P_j \left(\frac{2z}{h} \right) dz, \quad Q_{3n} = \int \sigma_{nz} P_2 \left(\frac{2z}{h} \right) dz,$$

$$M_{1n} = \int \sigma_n z dz = \frac{h}{2} \int \sigma_n P_1 \left(\frac{2z}{h} \right) dz, \quad M_{jn}^0 = \int P_n(z, s) P_j \left(\frac{2z}{h} \right) dz, \quad M_{js}^0 = \int P_s(z, s) P_j \left(\frac{2z}{h} \right) dz,$$

$$Q_{jn}^0 = \int P_n(z, s) P_{j-1} \left(\frac{2z}{h} \right) dz, \quad (j=1,3),$$

где $P_n(z, s), P_s(z, s), P_z(z, s)$ - составляющие поверхностных сил, приложенных к боковой поверхности, интегрирование проводится по толщине.

Система уравнений (3), (4) сводится к следующей системе уравнений

$$B_3 B_4 \nabla^4 \phi - (A_1 B_4 + A_{11} B_3) \nabla^2 \phi + (A_1 A_{11} - A_8^2) \phi = 0. \quad (7)$$

$$A_1\varphi_1 - A_2\nabla^2\varphi_1 + A_3\nabla^2\varphi_3 + A_4\varphi_3 + A_5\nabla^2w_1 - A_6\nabla^2w_3 + A_7\nabla^2q = 0. \quad (8)$$

$$A_8\varphi_1 + A_9\nabla^2\varphi_1 - A_{10}\nabla^2\varphi_3 + A_{11}\varphi_3 + A_{12}\nabla^2w_1 + A_{13}\nabla^2w_3 + A_{14}\nabla^2q = 0. \quad (9)$$

В уравнении (7) ϕ -вихревая функция, через которую выражаются $\phi_1(x, y)$ и $\phi_3(x, y)$.

$$\phi_1 = \left(\frac{Gh}{7} \nabla^2\phi - A_{11}\phi \right) / A_8, \quad \phi_3 = \phi. \quad (10)$$

Из (5) и (6) определяем φ_1 и φ_3 .

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Delta} [-a_6\nabla^2w_1 - A_{12}(A_{22})w_3 + a_{13}\nabla^2w_3 + a_{12}q]; \quad \varphi_3 = \frac{1}{\Delta} [a_3\nabla^2w_1 + A_5(A_{22})w_3 - a_9\nabla^2w_3 + a_{11}q], \quad (11)$$

$$\text{Где } a_6 = A_{16}A_{21} + A_{20}A_{17}, \quad a_{12} = A_{16}A_{24} - A_{20}, \quad a_{13} = A_{20}A_{18} - A_{16}A_{23}, \quad a_3 = A_{15}A_{21} + A_{19}A_{17},$$

$$a_9 = A_{23}A_{15} - A_6A_{18}, \quad a_{11} = A_{19} - A_{24}A_{15}, \quad \Delta = A_{15}A_{20} - A_{19}A_{16}.$$

Подставляя φ_1 и φ_3 в (8) и (9), получаем систему уравнений в перемещениях для определения потенциального напряженного состояния пластины.

$$L_{j1}w_1 + L_{j2}w_3 + L_jq = 0, \quad (j=1-2) \quad (12)$$

где L_{ji} - дифференциальные операторы, здесь не приводятся.

Таким образом, решение задачи об изгибе пластины свелось к определению w_1, w_3, ϕ из системы уравнений (12), описывающей потенциальное напряженное состояние, и уравнения (7), определяющего вихревое напряженное состояние (вихревой краевой эффект).

При этом $\varphi_1, \varphi_3, \phi_1, \phi_3, u_1, u_3, v_1, v_3$ определяются через w_1, w_3, ϕ из (11), (10), (3), (4).

В качестве примеров рассмотрены задачи изгиба прямоугольных, свободно опертых по контуру пластин ($a \times a$), под действием поперечных нагрузок:

1. локальной в виде пирамиды с размером её основания $\alpha = 0,3$;
2. синусоидальной по всей проекции пластины.

Нагрузка принималась в виде ряда:

$$q(x, y) = - \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} A_w^{m,n} S_x S_y$$

$$S_x = \sin P_m x, S_y = \sin P_n y, P_m = \frac{m\pi}{a}, P_n = \frac{n\pi}{b}.$$

$$A_w^{mn} = - \frac{8q_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{a}{\pi\alpha} \times \left[\frac{1}{m+n} \sin \left(\pi \frac{m+n}{2} \frac{\alpha}{a} \right) - \delta \right],$$

$$\delta = \frac{1}{m-n} \sin \left(\pi \frac{m-n}{2} \frac{\alpha}{a} \right) (m \neq n), \quad \delta = \pi \frac{\alpha}{2a} (m = n),$$

m, n - нечетные числа от 1 до 39 при действии локальной нагрузки.

m=n=1 при действии синусоидальной нагрузки по всей проекции пластины.

Результаты расчётов приведены в таблицах.

Таблица 1

Действие локальной нагрузки на свободно опёртую трансверсально - изотропную пластину ($\alpha/a=0,3, x=y=0,5a$)

$\frac{E}{E_3}$	$\frac{G}{G_3}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{z}{h}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\sigma_z}{q}$	$\frac{wE}{qh}$
1	1	0,02	0,00	0,000	0,000	21930
			0,25	34,48	0,331	21930
			0,50	97,90	0,483	21920
1	1	0,1	0,00	0,000	0,000	37,57
			0,25	1,392	0,312	37,47
			0,50	4,104	0,483	37,17
1	20	0,02	0,00	0,000	0,000	23330
			0,25	33,42	0,323	23330
			0,50	100,8	0,483	23320
1	20	0,1	0,00	0,000	0,000	91,97
			0,25	0,958	0,286	91,90
			0,50	5,351	0,483	91,69
4	1	0,02	0,00	0,000	0,000	21910
			0,25	33,45	0,332	21890
			0,50	98,55	0,483	21850
4	1	0,1	0,00	0,000	0,000	36,53
			0,25	1,900	0,302	36,08
			0,50	4,065	0,483	34,72

Таблица 2

Действие локальной нагрузки на свободно опёртую изотропную пластину

The effect of local load on a freely supported isotropic plate

$$\alpha/a=0,3, x=y=0,5a, z/h=0,5$$

$\frac{h}{a}$	$wEh^4(a^4q_0h)^{-1}10^4$			σ_1/q_0		
	по [5]	$i=1$	$i=1,3$	по [5]	$i=1$	$i=1,3$
0,01	3,213	3,206	3,206	369,6	369,0	369,1
0,1	3,402	3,433	3,404	3,912	4,776	3,903
0,2	4,094	4,122	4,125	1,176	1,009	1,151
0,5	11,99	8,947	12,39	0,468	0,234	0,383

Таблица 3

Действие синусоидальной нагрузки на свободно опёртую изотропную пластину

The effect of a sinusoidal load on a freely supported isotropic plate

$$\alpha/a=1, x=y=0,5a, z/h=0,5$$

$\frac{h}{a}$	$wEh^4(a^4q_0h)^{-1}10^4$			σ_1/q_0		
	по [5]	$i=1$	$i=1,3$	по [5]	$i=1$	$i=1,3$
0,01	20,86	20,81	20,81	16,05	16,01	16,01
0,1	21,63	21,80	21,63	16,18	16,08	16,18
0,2	24,21	24,79	24,24	4,173	4,076	4,172
0,5	46,11	45,73	47,36	0,825	0,713	0,823

Выводы. По результатам расчёта пластин из анизотропного материала установлено, что податливость материала в значительной мере влияет на НДС пластин. С ростом податливости материала и увеличением толщины распределение по толщине напряжений существенно отличается от линейных.

Результаты расчетов пластин из изотропного материала при действии поперечной как синусоидальной, так и локальной нагрузок для тонких пластин хорошо согласуются с решениями трехмерной теории упругости [3], что свидетельствует о хорошей точности решений в рамках рассматриваемой неклассической теории.

Установлено, что увеличение толщин пластины при действии как синусоидальной, так и локальной нагрузок с увеличением их толщин требует решений в высоких приближениях настоящей итерационной теории.

Литература

1. Прусаков А.П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины // Прикладная механика, 1993. - N12. - С. 51-58.
2. Прусаков А.П., Зеленский А.Г., Вовченко Н.Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек // Ukrainian-Pol / s4 seminar. Theoretical Foundations in Civil Engineering, 5, Warsaw, June 1997. – С.191-198.
3. Шойхет Б.А. Одна задача изгиба толстых плит // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1973. - №3. – С. 58-68.