Технические науки

УДК 539.3

Вовченко Николай Григорьевич

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Vovchenko Nikolay

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

Варяничко Марина Александровна

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Varianichko Marina

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

Нагорный Дмитрий Валериевич

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Nagorny Dmytro

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

НДС ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

THE INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATES AT THE LATERAL LOADING USING NONCLASSICAL ITERATION THEORY

Аннотация. *Построено решение задачи об изгибе пластины под действием локальной нагрузки на основе итерационной теории, учитывающей все компоненты напряженно-деформированного состояния.*

Ключевые слова: *пластина, напряженно-деформированное состояние, локальная нагрузка.*

Summary. *The solution of the problem of the bending of a plate under the action of a local load is constructed on the basis of an iterative theory that takes into account all the components of the stress-strain state.*

Key words: *plate, stress-strain state, local loadticity.*

В настоящей работе при решении задачи использовались уравнения уточнённой теории [1], учитывающей поперечные деформации сдвига, нелинейный закон изменения напряжений по толщине. Зависимости между деформациями и перемещениями для трансверсально-изотропной пластины принимались в соответствии с известными соотношениями Коши.

Для получения основных соотношений, уравнений и условий на контуре использовалось вариационное уравнение Рейсснера.

$$\iiint\left\langle \sigma_x\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sigma_y\delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\sigma_z\delta\frac{\partial w}{\partial z}+\sigma_{xy}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sigma_{xz}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\sigma_{yz}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\sigma_{xz}}{G_3}\right)+\delta\sigma_{xz}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\sigma_{yz}}{G_3}\right)\delta\sigma_{yz}+\left\{\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{E_3}\left[\sigma_z-\nu_3\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]\right\}\delta\sigma_z\left.\right\rangle dxdydz-$$

$$-\iint(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dF=0. \qquad (1)$$

В (1) $X,Y,Z-$составляющие поверхностных сил, F -площадь лицевых и боковых поверхностей пластины.

В [1] компоненты напряжений $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ и компоненты перемещений *u, v, w* принимались в виде рядов. Использовался метод разложений по толщинной координате с применением полиномов Лежандра.

$$u = P_1 u_1(x,y) + P_3 u_3(x,y)(u \to v), \quad w = P_0 w_1(x,y) + P_2 w_3(x,y),$$

$$\sigma_{xz} = (P_0 - P_2) Q_{1x}(x,y)/h + 3(P_2 - P_4)\ Q_{3x}(x,y)/(7h), \quad (x \to y)$$

$$\sigma_z = (3P_1/5 - P_3/10) q(x,y) + 3(P_1/35 - 2P_3/45 + P_5/63)\omega_3(x,y)/2, \tag{2}$$

где $P_i(2z/h)$ - полиномы Лежандра, h-толщина пластины, *q(x,y)*- поперечная нагрузка.

Функции $\omega_3(x,y)$, Q_{ix}, $Q_{iy}(i=1,3)$ и все компоненты напряжений выражаются согласно [2] через перемещения $u_i(x,y), v_i(x,y), \quad w_i(x,y), (i=1,3)$. Напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ удовлетворяют условиям на лицевых плоскостях пластины при $z = \pm 0{,}5h: \sigma_z = \pm 0{,}5q(x,y), \ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$

Все компоненты напряжений выражаются через перемещения [2].

Из вариационного уравнения (1) система уравнений равновесия пластин в перемещениях записывается в виде

$$A_1 u_1 - A_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{Gh}{3}\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + A_4 u_3 + A_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - A_6 \frac{\partial w_3}{\partial x} + A_7 \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$A_8 u_1 + A_9 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - A_{10} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{Gh}{7}\frac{\partial \phi_3}{\partial y} + A_{11} u_3 + A_{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial w_3}{\partial x} + A_{14} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$(x \to y, y \to x, u_1 \to v_1, \phi_3 \to -\phi_3);$$

$$A_{15}\varphi_1 + A_{16}\varphi_3 + A_{17}\nabla^2 w_1 - A_{18}\nabla^2 w_3 + q = 0; \tag{5}$$

$$A_{19}\varphi_1 + A_{20}\varphi_3 - A_{21}\nabla^2 w_1 - A_{22} w_3 + + A_{23}\nabla^2 w_3 + A_{24} q = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$\phi_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x}, \varphi_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad (i=1,3)$$

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \ D_1 = \frac{E\nu_3}{E_3(1-\nu)}, \ D_2 = \frac{1}{E_3}(1 - 2\nu_3 D_1), \ A_1 = \frac{56G_3}{15h}, \ A_2 = \frac{E_0 h}{3} + \frac{11D_1^2 h}{70D_2},$$

$$A_4 = A_8 = \frac{2A_{12}}{h} = \frac{2A_{16}}{h} = \frac{12G_3}{5h}, \quad A_5 = A_{15} = \frac{28G_3}{15}, \quad A_6 = -A_{19} = \frac{2G_3}{15} + \frac{33D_1}{35D_2}, \; A_7 = -\frac{2D_1h}{21},$$

$$A_7 = -\frac{2D_1h}{21}, \; A_{12} = A_{16} = \frac{6G_3}{5}, \; A_{10} = \frac{E_0h}{7} + \frac{22D_1^2h}{315D_2}, \; A_{12} = A_{16} = \frac{6G_3}{5}, A_3 = A_9 = \frac{11D_1^2h}{105D_2}, \; A_{11} = \frac{72G_3}{5h},$$

$$A_{14} = -\frac{D_1h}{18},$$

$$A_{13} = A_{20} = \frac{6G_3}{5} + \frac{22D_1}{35D_2}, \quad A_{17} = \frac{14B_1}{15}, \quad A_{18} = A_{21} = \frac{B_1}{5}, \; A_{22} = \frac{198}{35D_2h}, \quad A_{23} = \frac{2B_1}{15}, A_{24} = \frac{3}{7}, B_1 = G_3h.$$

Условия на контуре могут быть получены из (1).

$$\int\Big[\left(\frac{2}{h}M_{1n} - M_{1n}^0\right)\delta u_{1n} + \left(\frac{2}{h}M_{1s} - M_{1s}^0\right)\delta u_{1s} + + \left(M_{3n} - M_{3n}^0\right)\delta u_{3n} + \left(M_{3s} - M_{3s}^0\right)\delta u_{3s} + \left(Q_{1n} - Q_{1n}^0\right)\delta w_1 +$$

$$+\left(M_{3n} - M_{3n}^0\right)\delta u_{3n} + \left(M_{3s} - M_{3s}^0\right)\delta u_{3s} + \left(Q_{1n} - Q_{1n}^0\right)\delta w_1 + + \left(\frac{3}{35}Q_{3n} - \frac{1}{5}Q_{1n} - Q_{3n}^0\right)\delta w_3\Big]ds = 0,$$

где

$$M_{jn} = \int \sigma_n P_j\left(\frac{2z}{h}\right)dz, \;\; M_{js} = \int \sigma_s P_j\left(\frac{2z}{h}\right)dz, \;\; Q_{3n} = \int \sigma_{nz} P_2\left(\frac{2z}{h}\right)dz,$$

$$M_{1n} = \int \sigma_n z dz = \frac{h}{2}\int \sigma_n P_1\left(\frac{2z}{h}\right)dz, \;\; M_{jn}^0 = \int P_n(z,s)P_j\left(\frac{2z}{h}\right)dz, \;\; M_{js}^0 = \int P_s(z,s)P_j\left(\frac{2z}{h}\right)dz,$$

$$Q_{jn}^0 = \int P_n(z,s)P_{j-1}\left(\frac{2z}{h}\right)dz, \; (j=1,3),$$

где $P_n(z,s), \; P_s(z,s), \; P_z(z,s)$ - составляющие поверхностных сил, приложенных к боковой поверхности, интегрирование проводится по толщине.

Система уравнений (3), (4) сводится к следующей системе уравнений

$$B_3B_4\nabla^4\phi - (A_1B_4 + A_{11}B_3)\nabla^2\phi + + \left(A_1A_{11} - A_8^2\right)\phi = 0. \tag{7}$$

$$A_1\varphi_1 - A_2\nabla^2\varphi_1 + A_3\nabla^2\varphi_3 + A_4\varphi_3 + A_5\nabla^2 w_1 - - A_6\nabla^2 w_3 + A_7\nabla^2 q = 0. \tag{8}$$

$$A_8\varphi_1 + A_9\nabla^2\varphi_1 - A_{10}\nabla^2\varphi_3 + A_{11}\varphi_3 + A_{12}\nabla^2 w_1 + + A_{13}\nabla^2 w_3 + A_{14}\nabla^2 q = 0. \tag{9}$$

В уравнении (7) ϕ-вихревая функция, через которую выражаются $\phi_1(x,y)$ и $\phi_3(x,y)$.

$$\phi_1 = \left(\frac{Gh}{7}\nabla^2\phi - A_{11}\phi\right)/A_8, \; \phi_3 = \phi. \tag{10}$$

Из (5) и (6) определяем φ_1 и φ_3.

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Delta}\left[-a_6\nabla^2 w_1 - A_{12}(A_{22})w_3 + a_{13}\nabla^2 w_3 + a_{12}q\right];\ \varphi_3 = \frac{1}{\Delta}\left[a_3\nabla^2 w_1 + A_5(A_{22})w_3 - a_9\nabla^2 w_3 + a_{11}q\right], \tag{11}$$

где $a_6 = A_{16}A_{21} + A_{20}A_{17}$, $a_{12} = A_{16}A_{24} - A_{20}$, $a_{13} = A_{20}A_{18} - A_{16}A_{23}$, $a_3 = A_{15}A_{21} + A_{19}A_{17}$,

$a_9 = A_{23}A_{15} - A_6A_{18}$, $a_{11} = A_{19} - A_{24}A_{15}$, $\Delta = A_{15}A_{20} - A_{19}A_{16}$.

Подставляя φ_1 и φ_3 в (8) и (9), получаем систему уравнений в перемещениях для определения потенциального напряженного состояния пластины.

$$L_{j1}w_1 + L_{j2}w_3 + L_j q = 0,\ (j=1\text{-}2) \tag{12}$$

где L_{ji} - дифференциальные операторы, здесь не приводятся.

Таким образом, решение задачи об изгибе пластины свелось к определению w_1, w_3, ϕ из системы уравнений (12), описывающей потенциальное напряженное состояние, и уравнения (7), определяющего вихревое напряженное состояние (вихревой краевой эффект).

При этом φ_1, φ_3, ϕ_1, ϕ_3, u_1, u_3, v_1, v_3 определяются через w_1, w_3, ϕ из (11), (10), (3), (4).

В качестве примера рассмотрена задача изгиба прямоугольной, свободно опертой по контуру пластины $(a \times a)$, под действием поперечной локальной в виде пирамиды нагрузки с размером её основания $\alpha = 0{,}3$.

Нагрузка принималась в виде ряда:

$$q(x,y) = -\sum_{m=1,3}^{\infty}\sum_{n=1,3}^{\infty} A_w^{m,n} S_x S_y$$

$$S_x = \sin P_m x,\ S_y = \sin P_n y,\quad P_m = \frac{m\pi}{a},\ P_n = \frac{n\pi}{b}.$$

$$A_w^{mn} = -\frac{8q_0}{\pi^2 mn}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{a}{\pi\alpha}\times\times\left[\frac{1}{m+n}\sin\left(\pi\frac{m+n}{2}\frac{\alpha}{a}\right) - \delta\right],$$

$$\delta = \frac{1}{m-n}\sin\left(\pi\frac{m-n}{2}\frac{\alpha}{a}\right)\ (m \neq n),\quad \delta = \pi\frac{\alpha}{2a}(m=n),$$

m, n - нечетные числа от 1 до 39.

Результаты расчётов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Действие локальной нагрузки на свободно опёртую трансверсально - изотропную пластину (*α/a=0,3, x=y=0,5a)*

$\frac{E}{E_3}$	$\frac{G}{G_3}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{z}{h}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\sigma_z}{q}$	$\frac{wE}{qh}$
1	1	0.02	0,00 0,25 0,50	0,000 34.48 97,90	0,000 0,331 0,483	21930 21930 21920
1	1	0,1	0,00 0,25 0,50	0,000 1,392 4,104	0,000 0,312 0,483	37,57 37,47 37,17
1	20	0,02	0,00 0,25 0,50	0,000 33,42 100,8	0,000 0,323 0,483	23330 23330 23320
1	20	0,1	0,00 0,25 0,50	0,000 0,958 5,351	0,000 0,286 0,483	91,97 91,90 91,69
4	1	0,02	0,00 0,25 0,50	0,000 33,45 98,55	0,000 0,332 0,483	21910 21890 21850
4	1	0,1	0,00 0,25 0,50	0,000 1,900 4,065	0,000 0,302 0,483	36,53 36,08 34,72

Выводы. По результатам расчёта пластин из анизотропного материала установлено, что податливость материала в значительной мере влияет на НДС пластин. С ростом податливости материала и увеличением толщины распределение по толщине напряжений существенно отличается от линейных.

Литература

1. Прусаков А.П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины / Прикладная механика. - 1993. – N12. - С. 51-58.
2. Прусаков А.П., Зеленский А.Г., Вовченко Н.Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек // Ukrainian-Pol / s4 seminar. Theoretical Foundations in Civil Engineering, 5, Warsaw, June 1997. – С.191-198.