Технические науки

УДК 539.3

Вовченко Николай Григорьевич

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Vovchenko Nikolay

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

Варяничко Марина Александровна

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Varianichko Marina

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

Нагорный Дмитрий Валериевич

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

Приднепровская Государственная академия

строительства и архитектуры

Nagorny Dmytro

PhD in Civil Engineering, Associate Professor

Prydniprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture

ЗАДАЧА ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО – ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ОСНОВЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

THE PROBLEM OF THE BENDING OF A TRANSVERSAL-ISOTROPIC SHALLOW SPHERICAL SHELL UNDER THE LOCAL LOADING USING ITERATIVE THEORY

Аннотация. *Построено решение задачи об изгибе сферической оболочки под действием локальной нагрузки на основе итерационной теории, учитывающей все компоненты напряженно-деформированного состояния.*

Ключевые слова: *оболочка, напряженно-деформированное состояние, локальная нагрузка.*

Summary. *The problem of the bending of a spherical shell under the local loading is solved iterative theory that takes into account all the components of the stress-strain state.*

Key words*: shell, stress-strain state, local loading.*

На основе метода варьирования по определяемому состоянию [4] с учетом всех компонент НДС в первом приближении строится решение задачи изгиба пологой трансверсально - изотропной сферической оболочки поперечной, приложенной в полюсе по нормали к срединной поверхности равномерно распределённой по круговой площадке радиуса r_0 нагрузкой интенсивностью q_0.

Разрешающие уравнения для первого приближения с учетом всех компонент НДС имеют вид [4]:

$$D\nabla^2\nabla^2 w_1 - \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\mu)}\frac{G}{G_3}\nabla^2\right]\nabla_k^2 F = \left[1 - \frac{h^2}{10(1-\mu)}\left(2\frac{G}{G_3} - \mu\frac{E}{E_3}\right)\nabla^2\right] q,$$

$$\nabla^2\nabla^2 F + Eh\nabla_k^2 w_1 = -\frac{\mu_3}{2}\frac{Eh}{E_3}\nabla^2 p, \tag{1}$$

$$\nabla^2 \psi_1 - \frac{10}{h^2}\frac{G_3}{G}\psi_1 = 0 .$$

Аналогично [3] уравнения (1) приведены к виду:

$$\nabla^2\left(\nabla^2\nabla^2 F - 2L_1 N_1^{-2}\nabla^2 F + N_1^{-4}F\right) = -K_1 q + K_2\nabla^2 q - K_3\nabla^2\nabla^2 p \tag{2}$$

где

$$K_1 = \frac{Eh}{RD};\; N_1 = \sqrt[4]{\frac{R^2h^2}{12\left(1-\mu^2\right)}};\; K_2 = \frac{Eh^3}{10RD(1-\mu)}\left(2\frac{G}{G_3} - \mu_3\frac{E}{E_3}\right);\; K_3 = \frac{Eh}{E_3}\frac{\mu_3}{2} .$$

Общее решение уравнения (2) принято в виде

$$F = F_0 + F_1 + F_2 ,$$

где

F_1 -решение однородного уравнения

$$\nabla^2\nabla^2 F + 2L_1 N_1^{-2}\nabla^2 F + N_1^{-4}F = 0 .$$

F_2 - решение уравнения

$$\nabla^2 F = 0 .$$

F_0 - частное решение неоднородного уравнения.

После определения функции усилий F из второго уравнения (1) определяется w_1.

Нагрузка на оболочку принята в виде

$$q(r) = q\delta(r - r_0), \tag{3}$$

где $\delta(r - r_0)$– функция Дирака.

Для удобства последующих выкладок приведем выражение для функции усилий [2], от действия единичной нагрузки:

$$F(r) = \frac{Eh\pi q r_0}{2RD}N_1^4\left\{-\frac{2}{\pi}\ln r - v_0(\lambda r_0)\left(\frac{\alpha}{\beta}g_0(\lambda r) - f_0(\lambda r)\right) + u_0(\lambda r_0)\left(\frac{\alpha}{\beta}f_0(\lambda r) + g_0(\lambda r)\right) - \right.$$

$$-\frac{h^2}{10(1-\mu)N_1^4\beta}\left(u_0(\lambda r_0)f_0(\lambda r) - v_0(\lambda r_0)g_0(\lambda r)\right) +$$

$$\left. + \frac{RD}{E_3N_1^4}\frac{\mu_3}{2}\left(u_0(\lambda r_0)\left(-g_0(\lambda r) + \frac{\alpha}{\beta}f_0(\lambda r)\right)\right) + v_0(\lambda r_0)\left(-f_0(\lambda r) - \frac{\alpha}{\beta}g_0(\lambda r)\right)\frac{\lambda}{\lambda}\right\} \tag{4}$$

$$(0 < r_0 < r)\left[0 < r < r_0, r \to r_0, r_0 \to r\right].$$

Для получения решения о действии на оболочку нагрузки, равномерно распределенной по круговой площадке радиуса r_0 заменяем в (3) q на qdr и интегрируем полученные выражения по r в пределах от 0 до r_0.

Решение в области действия нагрузки получаем путем сложения решений уравнения (2), соответствующих интегрированию по r от 0 до r и от r до r_0.

При этом в первом интеграле используем выражение для $r > r_0$, заменяя в нем r_0 на r, во втором $r < r_0$.

С учётом соотношений для функций комплексного аргумента [3]

$$\int r u_0(\lambda r) dr = -\frac{r}{\lambda} v_0^{/}(\lambda r); \; \int r v_0(\lambda r) dr = -\frac{r}{\lambda} u_0^{/}(\lambda r);$$

$$\int r f_0(\lambda r) dr = -\frac{r}{\lambda} g_0^{/}(\lambda r); \; \int r g_0(\lambda r) dr = -\frac{r}{\lambda} f_0^{/}(\lambda r). \tag{5}$$

Для функций $J_0(x)$ и $H_0(x)$ [1]

$$J_0(x)\frac{dH_0(x)}{dx} - H_0(x)\frac{dJ_0(x)}{dx} = -\frac{2i}{\pi x} \tag{6}$$

В (6) принимая $x = \lambda_1 r$, и отделяя действительные и мнимые части, записываем

$$v_0(\lambda_1 r) g_0^{/}(\lambda_1 r) - u_0(\lambda_1 r) f_0^{/}(\lambda_1 r) + f_0(\lambda_1 r) u_0^{/}(\lambda_1 r) - g_0(\lambda_1 r) v_0^{/}(\lambda_1 r) = 0, \tag{7}$$

$$v_0(\lambda_1 r) f_0^{/}(\lambda_1 r) + u_0(\lambda_1 r) g_0^{/}(\lambda_1 r) - g_0(\lambda_1 r) u_0^{/}(\lambda_1 r) - f_0(\lambda_1 r) v_0^{/}(\lambda_1 r) = \frac{2}{\pi \lambda_1 r} \tag{8}$$

С учетом (5, 7, 8) для зоны действия нагрузки:

$$F(r) = K_1 \frac{q r_0}{\lambda_1} \frac{\pi}{2} N_1^4 \left\{ v_0(\lambda_1 r)\left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1} f_0^{/}(\lambda_1 r_0) - g_0^{/}(\lambda_1 r_0)\right] + \right.$$

$$+ u_0(\lambda_1 r)\left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1} g_0^{/}(\lambda_1 r_0) + f_0^{/}(\lambda_1 r_0)\right] - K_2\left[u_0(\lambda_1 r) g_0^{/}(\lambda_1 r_0) - v_0(\lambda_1 r) f_0^{/}(\lambda_1 r_0) + \frac{2}{\pi \lambda_1 r_0}\right] + \frac{h}{R}\frac{E}{E_3}\frac{\mu_3}{2} \times$$

$$\times \left[-u_0(\lambda_1 r)\left(f_0^{/}(\lambda_1 r_0) + \frac{\alpha_1}{\beta_1} g_0^{/}(\lambda_1 r_0)\right)\right] + v_0(\lambda_1 r)\left[g_0^{/}(\lambda_1 r_0) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} f_0^{/}(\lambda_1 r_0) + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{2}{\pi \lambda_1 r_0}\right] +$$

$$\left. + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{2}{\pi \lambda_1 r_0} - \frac{2\lambda_1}{\pi r_0}\left(r_0^2 \ln r_0 - \frac{r_0^2 - r^2}{4}\right) \right\} \tag{9}$$

С учетом (5, 7, 8) вне зоны действия нагрузки:

$$F(r)=K_1\frac{qr_0}{\lambda_1}\frac{\pi}{2}N_1^4\left\{g_0(\lambda_1 r)\left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1}u_0'(\lambda_1 r_0)-v_0'(\lambda_1 r_0)\right]+\right.$$

$$+f_0(\lambda_1 r)\left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1}v_0'(\lambda_1 r_0)+u_0'(\lambda_1 r_0)\right]+K_2\left[-f_0(\lambda_1 r)v_0'(\lambda_1 r_0)-g_0(\lambda_1 r)u_0'(\lambda_1 r_0)\right]+$$

$$\left.+\frac{h}{R}\frac{E}{E_3}\frac{\mu_3}{2}\left[f_0(\lambda_1 r)u_0'(\lambda_1 r_0)+\frac{\alpha_1}{\beta_1}v_0'(\lambda_1 r_0)\right]+g_0(\lambda_1 r)\left[v_0'(\lambda_1 r_0)-\frac{\alpha_1}{\beta_1}u_0'(\lambda_1 r_0)\right]-\frac{\lambda_1}{\pi}r_0\ln r\right\} \quad (10)$$

Условия сопряжения $F(r)\,(r=r_0)$ выполняются.

Выводы. В предельном переходе ($E/E_3=0$, $G/G_3=0$), что соответствует решению задачи на основе уравнений классической теории пологих оболочек, решение совпадает с [5].

Литература

1. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. В 2-х т.-М. Иностраниздат, 1949.
2. Вовченко Н. Г., Корниенко А. Н. Сферический сегмент под действием единичной поперечной нагрузки // Teoreretical Foundations of Civil Engineering. Warsaw. – 2002. – Vol. 10. – P.618-621.
3. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. - К.:Наукова думка, 1970. – 324 с.
4. Прусаков А. П. О построении уточненной теории пологих оболочек энергоасимптотическим методом. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1977. – №12. – С. 25-29.
5. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Розв'язок задач згину пологих сферичних оболонок. –Прикл. Мех.,1964. – т.10. – вип. 4. – С. 382-391.