Секція: Фізико-математичні науки

Танчук Микола Олександрович
пенсіонер
м. Київ, Україна

ЗАДАЧА ПРО КВАДРАТУРУ КРУГА

Розглянемо задачу про квадратуру круга за допомогою циркуля і лінійки.

Квадратура круга — задача, яка полягає в знаходженні способів побудови за допомогою циркуля і лінійки квадрата, рівновеликого за площею площі заданого круга. Як трисекція кута і подвоєння куба, є однією із самих відомих древніх нерозв'язаних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Якщо позначити R - радіус заданого круга, x — довжину сторони шуканого квадрата, то, в сучасному розумінні, задача зводиться до розв'язку рівняння: $x^2 = \pi R^2$, звідки отримуємо: $x = \sqrt{\pi} R \approx 1{,}77245 R$. Доведено, що за допомогою циркуля і лінійки, точно побудувати таку величину неможливо.

Давньогрецькі математики вважали своєю задачею не обчислення, а точну побудову шуканого квадрата («квадратуру»), причому, відповідно тодішнім принципам, тільки за допомогою циркуля і лінійки. Цією проблемою займались визначні античні вчені - Анаксагор, Антіфон, Брісон Гераклійський, Архімед та інші.

Гіпократ Хіоський в IV столітті до н. е. один із перших побачив, що деякі криволінійні фігури (гіпократові луночки) допускають точну квадратуру. Розширити клас таких фігур античним математикам не вдалося. Іншим шляхом пішов його сучасник Діностратт, який показав, що квадратуру круга можна чітко виконати за допомогою особливої кривої — квадратриси.

В «Началах» Евкліда (III вік до н. е.) питання про площу круга не розглядається. Важливим етапом дослідження проблеми площі круга став твір Архімеда «Вимірювання круга», в якому вперше строго доказана теорема: площа круга рівна площі прямокутного трикутника у якого один катет дорівнює радіусу кола, а другий — довжині кола. Архімед також дав оцінку числа $\pi \approx 22/7$.

Подальші дослідження індійських, ісламських і європейських математиків на цю тему, довгий час торкались, в основному, уточнення значення числа π і підбору наближених формул для квадратури круга. В середньовічній Європі цією задачею займались Фібоначі, Микола Кузанський і Леонардо да Вінчі. Пізніше численні дослідження опублікували Кеплер і Гюйгенс. Поступово міцніла впевненість в тому, що что число π ірраціональне, тобто не може бути точно вираженим за допомогою скінченого числа арифметичних операцій (включаючи добування кореня) звідси випливала би неможливість квадратури круга.

Ірраціональність числа π була доказана Ламбертом в 1766 році в работі «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга». Праця Ламберта мала прогалини , які незабаром були виправлені Лежандром (1794 рік). Остаточний розв'язок отримав в 1882 році Ліндеман. Математики також запропонували велику кількість практично корисних методів наближення квадратури круга.

Якщо прийняти за одиницю виміру радіус круга і позначити через x довжину сторони шуканого квадрата, то задача зводиться до розв'язку рівняння: $x^2 = \pi$, звідси: $x = \sqrt{\pi}$. За допомогою циркуля і лінійки можна виконати усі 4 арифметичні дії і добування квадратного кореня; звідси випливає, що квадратура круга можлива тоді і тільки тоді, коли за допомогою скінченого числи таких дій можна побудувати відрізок довжини π. Таким чином, нерозв'язанність цієї задачі випливає із неалгебраїчності (трансцендентності) числа π, яка була доведена в 1882 році Ліндеманом.

Проте цю нерозв'язанність потрібно розуміти, як нерозв'язаність при використанні тільки циркуля і лінійки.. Задача про квадратуру круга стає розв'язаною, якщо, крім циркуля і лінійки, використовувати інші засоби (наприклад, квадратрису). Простий механічний спосіб запропонував Леонардо да Вінчі. Виготуємо круговий циліндр з радіусом основи R і висотою R/2, покрасимо чорнилом бічну поверхню цього циліндра і покотимо його по площині. За один повний оберт циліндр залишить на площині прямокутний слід площею πR^2. Маючи такий прямокутник уже досить просто побудувати рівновеликий йому квадрат.

Ось така коротка історія квадратури круга, взята з різних джерел в інтернеті.

Розв'язавши задачу трисекції кута (і не тільки!) я отримав можливість побудови, за допомогою циркуля і лінійки, квадрата рівновеликого заданому кругу [1], звичайно наближено, так як ідеальної формули для площі круга, окрім вище згаданої, немає. За основу взята відома формула площі круга S = πR^2.

Почнемо з аналізу. Оскільки описаний навколо круга квадрат за площею більший від нього, а вписаний менший, то шуканий квадрат відсікатиме чотири, рівні за площею, сегменти і, в той же час, додаються чотири, рівні за площею криволінійних трикутники, тобто шуканий квадрат має бути таким, щоб площа криволінійного трикутника дорівнювала площі одного сегмента. Розмістимо квадрат таким чином, щоб криволінійний трикутник і сегмент знаходились в одному квадранті прямолінійної системи координат, як це показано на рис. 1.

В системі координат XOY рівняння одиничного кола має вигляд:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

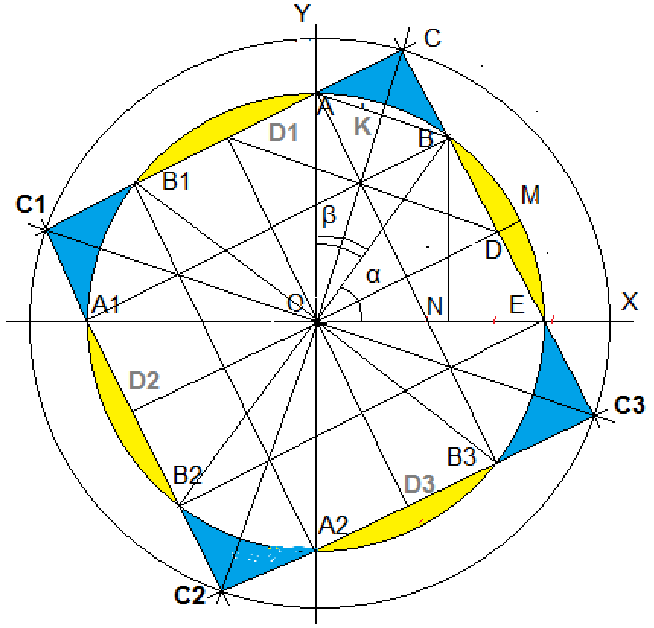

Рис. 1

Впишемо в це коло квадрат і будемо рівномірно збільшувати його, дотримуючись симетрії відносно центра, поки площа квадрата не стане рівною площі одиничного круга, як це показано на рис.1. В першому квадранті сторона квадрата СС3 відсікає від круга сегмент ВЕ і тут же розміщено криволінійний трикутник АСВ, утворений в перетині сторін квадрата СС1 і СС3 і дугою кола АВ, Рівність площ цих двох фігур визначатимуть умову ріності площ шуканого квадрата і круга.

Запишемо рівняння прямих, що проходять через точки А(0; 1) і В(x_0; y_0):

$(x - 0)/(x_0 - 0) = (y - 1)/ (y_0 -1)$,

$y = ((y_0 - 1)/x_0)x + 1$ – рівняння прямої, що проходить через точки А, В;

позначимо $c_1 = (y_0 - 1)/x_0$, маємо

$$y = c_1 x + 1; \qquad (2)$$

далі: точки В(x_0; y_0) і Е(1; 0):

$(x – x_0)/(1 – x_0) = (y – y_0)/ (0 - y_0)$,

$y = -(y_0/(1 - x_0))x + y_0/(1 - x_0)$ - рівняння прямої, що проходить через точки B, E;

позначимо $c_2 = y_0/(1 - x_0)$, маємо:

$$y = -c_2 x + c_2; \qquad (3)$$

Обчислимо площу сегмента обмеженого дугою кола і відрізком прямої BE. Застосовуючи інтеграли, отримаємо:

$S_{\text{сегм.BE}} = \int_{x0}^{1}((1 - x^2)^{1/2} + c_2 x - c_2)\,dx =$

$= (\, ½\, x\,(1 - x^2)^{1/2} + ½ \arcsin(x) + c_2\, x^2/2 - c_2\, x) \,|\,^{1}_{x0} =$

$= \frac{\pi}{4} - ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} - ½ \arcsin(x_0) + ½\, c_2 - c_2 - ½\, c_2\, x_0^2 + c_2\, x_0 =$

$\frac{\pi}{4} - ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} - ½ \arcsin(x_0) - ½\, c_2 - ½\, c_2\, x_0^2 + c_2\, x_0.$

Обчислимо площу сегмента обмеженого дугою кола і відрізком прямої AB. Застосовуючи інтеграли, отримаємо:

$S_{\text{сегм.AB}} = \int_{0}^{x0}((1 - x^2)^{1/2} - c_1 x - 1)\,dx =$

$= (½\, x\,(1 - x^2)^{1/2} + ½ \arcsin(x) - c_1\, x^2/2 - x) \,|^{x0}{}_{0} =$

$= ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} + ½ \arcsin(x_0) - ½\, c_1\, x_0^2 - x_0.$

Обчислимо площу трикутника ABC. Подвоєна площа квадрата зі стороною AC дорівнює $|AB|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2$, тому

$S_{\text{тр.ABC}} = (x_0^2 + (y_0 - 1)^2)/4 = -1/2\, y_0 + 1/2.$

Обчислимо площу криволінійного трикутника ABC:

$S_{\text{кр.тр.ABC}} = -½\, y_0 + 1/2 - ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} - ½ \arcsin(x_0) + ½\, c_1\, x_0^2 + x_0.$

Прирівнюючи $S_{\text{сегм.BE}}$ до $S_{\text{кр.тр.ABC}}$, отримаємо:

$\frac{\pi}{4} - ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} - ½ \arcsin(x_0) - ½\, c_2 - ½\, c_2\, x_0^2 + c_2\, x_0 =$

$= -½\, y_0 + 1/2 - ½\, x_0\,(1 - x_0^2)^{1/2} - ½ \arcsin(x_0) + ½\, c_1\, x_0^2 + x_0;$

$\frac{\pi}{4} - ½\, y_0/(1 - x_0) - ½\,(y_0/(1 - x_0))\, x_0^2 + (y_0/(1 - x_0))\, x_0 =$

$-½\, y_0 + 1/2 + ½\,((y_0 - 1)/x_0)\, x_0^2 + x_0;$

$\frac{\pi}{4} + ½\, y_0\, x_0 = ½ + ½\,(y_0 - 1)\, x_0 + x_0;$

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + ½\, x_0;$

$\frac{\pi}{2} - 1 = x_0$.

Ординату точки В y_0 визначимо з умови її належності колу:

$y_0 = (1 - x_0^2)^{½}$.

Як бачимо, абсциса точки В x_0 обчислюється через $\frac{\pi}{2}$, яке вважається трасцендентним числом і за допомогою циркуля і лінійки, в даному разі, x_0 побудувати неможливо.

Для тих, хто не володіє методами аналітичної геометрії і математичного аналізу можна скористатись знаннями із шкільного курсу геометрії і тригонометрії.

Кут в 90^0 поділений на два гострі кути: ВОА і ЕОВ, дуги яких належать відповідно криволінійному трикутнику АСВ і сегменту ВМЕ.

При таких даних легко обчислити площі потрібних нам фігур: сегмента і криволінійного трикутника:

$S_{СЕК.EOB} = (\alpha \cdot R2)/2$; $_{STP.EOB} = (EB \cdot OD)/2 = (2 \cdot R \cdot \sin \alpha/2 \cdot R \cdot \cos\alpha/2\ )/2 = (R^2 \cdot \sin\alpha)/2$;

$S_{СЕГ.EBM} = S_{СЕК.EOB} - S_{ТР.EOB} = (\alpha \cdot R^2)/2 - (R^2 \cdot \sin\alpha)/2$;

$S_{СЕК.BOA} = (\beta \cdot R^2)/2$; $S_{ТР.BOA} = (AB \cdot OK)/2 = (2 \cdot R \cdot \sin\beta/\ 2 \cdot R \cdot \cos\beta/2\ )/2 = (R^2 \cdot \sin\beta)/2$;

$S_{СЕГ.AB} = S_{СЕК.BOA} - S_{ТР.BOA} = (\beta \cdot R^2)/2 - (R^2 \cdot \sin\beta)/2$;

в трикутнику АСВ: АС = СВ; в трикутнику АСК: АК = КС;

$S_{ТР.ACB} = (AB \cdot KC)/2 = (2 \cdot R \cdot \sin\beta/2 \cdot R \cdot \sin\beta/2)/2 = R^2 \cdot \sin^2\beta/2$;

$S_{КР.ТР.ACB} = S_{ТР.ACB} - S_{СЕГ.AB} = R^2 \cdot \sin^2\beta/2 - (\beta \cdot R^2)/2 + (R^2 \cdot \sin\beta)/2$.

Тепер можна визначити значення параметрів α і β із системи двох рівнянь:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$(\alpha \cdot R^2)/2 - (R^2 \cdot \sin\alpha)/2 = R^2 \cdot \sin^2\beta/2 - (\beta \cdot R^2)/2 + (R^2 \cdot \sin\beta)/2;$$

Із першого рівняння, маємо: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$;

підставивши це значення α в друге рівняння, маємо:

$(\frac{\pi}{2} - \beta)$ $R^2/2$ – ($R^{2}\cdot$ sin $(\frac{\pi}{2} - \beta))/2$ = $R^2 \cdot \sin^2\beta/2$ - $(\beta \cdot$ R^2)/2 + ($R^2 \cdot \sin\beta$)/2;

$\pi \cdot R^2/4 - \beta \cdot R^2/2 - (R^2 \cdot \cos\beta)/2 = R^2/2 - (R^2 \cdot \cos\beta)/2 + (R^2 \cdot \sin\beta)/2;$

$\frac{\pi}{2}$ - 1= $\sin\beta$;

якщо замінити β на $\frac{\pi}{2}$ - α і скориставшись відомим значенням π, маємо:

$\frac{\pi}{2} - 1 = \cos\alpha \approx 0.5708$; $\alpha \approx 55^0$, $\beta \approx 35^0$; $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{11}{7}$ (оцінка Архімеда для $\frac{\pi}{2}$);

Користуючись модельним методом [1; 2], за допомогою циркуля і лінійки кут в 90^0 ділимо у відношенні 11/7 і виконуємо побудову квадратури круга, звичайно, наближено (рис.2).

Побудову можна виконати ще простіше і іншим способом. Вважаючи радіус кола OE одиничним, побудуємо відрізок ON, а потім в точці N поставимо перпендикуляр до OE і визначимо точку B. Маючи точку B тепер легко побудувати точки B1, B2, B3 (EB = AB1 =A1B2 = A2B3) і закінчити побудову, провівши прямі через відповідні точки на колі, які в перетині визначають шуканий квадрат (рис. 2).

Можна взяти найкраще раціональне наближення числа π при відношенні двох трьоцифрових чисел 355/113, які різняться лише сьомим знаком після коми, з точністю до 0.0000001, і виконати розрахунки і побудову, яка нічим не відрізняється від показаної на рис. 2.

Обчислюючи більш точніше значення $\cos\alpha$ можна побудувати квадрат із заданою точністю наближення. Слід зауважити, що квадратура круга не залежить від величини радіуса, а залежить тільки від значення $\cos\alpha$.

Якщо не враховувати ці обмеження, то можна вважати задачу про квадратуру круга розв'язаною (наближено).

Розглянемо рис. 2 і проаналізуємо виконану побудову.

З описаної побудови випливає, що ідеальний квадрат рівновеликий площі круга існує, хоча при такому значені константи π побудувати його, за допомогою циркуля і лінійки, неможливо. Будемо вважати, що якимось чином така побудова все-таки виконана і проведемо її аналіз.

На рис. 2 маємо шуканий квадрат CC1C2C3. Лінії симетрії цього квадрата:

D2D, D1D3 ділять його на 4(чотири) рівних квадрати: CD1OD, D1C1D2O,

D2C2D3O, D3C3DO. Розглянемо квадрат CD1OD. В ньому проведені 4(чотири) лінії симетрії, включаючи діагоналі. Згідно цьому факту CB = BD, CD = BE, 2·BE = A1B. Із прямокутного трикутника A1BE, маємо: $A1B^2 + BE^2 = A1E^2$. Оскільки OE = 1, маємо: $5 \cdot BE^2 = 4$; звідси $BE = 2/\sqrt{5}$, сторона квадрата $C1C = A1B = 2 \cdot BE = 4/\sqrt{5}$; отже площа шуканого квадрата, рівновеликого площі круга одиничного радіуса $S_{CC1C2C3} = A1B^2 = (4/\sqrt{5})^2 = 3.2 = \pi$, згідно умови задачі.

Згідно умови $\pi/2 - 1 = ON = x_0 = \cos\alpha = 3.2/2 - 1 = 0.6$, що дозволяє легко виконати побудову рівновеликого квадрата за допомогою циркуля і лінійки (рис. 2).

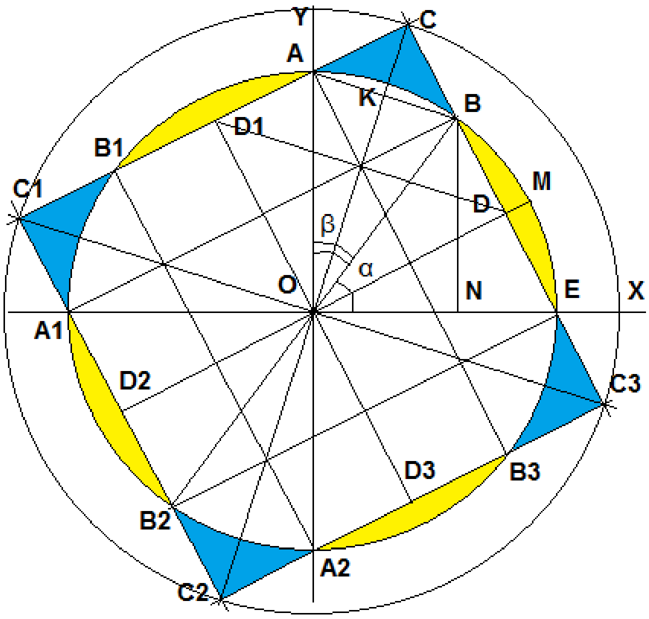

Рис. 2

Цікаво відмітити і той факт, що координатами точки B є раціональні піфагорові числа (3/5; 4/5). Враховуючи симетрію квадрата, можна записати координати точок: B1, B2,B3: B1(-4/5; 3/5), B2(-3/5; -4/5), B3(4/5; -3/5), що лежать на інших сторонах шуканого квадрата, а також рівняння прямих, що містять сторони шуканого квадрата CC1C2C3. Для цього скористаємось рівнянням прямої (3). Знаючи координати точки B, маємо:

$c2 = y_0/(1 – x_0) = 4/5(1 – 3/5) = 2.$

Рівняння прямої, що містить сторону шуканого квадрата CC3:

$y = - 2x + 2;$

Рівняння прямої, що містить сторону шуканого квадрата C1C2, паралельної стороні CC3, маємо: $y = - 2x - 2;$

Рівняння прямої, що містить сторону шуканого квадрата CC1, перпендикулярної стороні CC3, маємо: $y = 1/2x + 1;$

Рівняння прямої, що містить сторону шуканого квадрата C2C3, паралельної стороні CC1, маємо: $y = 1/2x - 1;$

Таким чином, теоретично отримано нове фундаментальне раціональне значення для числа $\pi = 3.2$, визначення якого опирається на обґрунтовану основу через квадратуру круга одиничного радіуса із використанням властивостей симетрії квадрата. Чи узгоджується цей факт з обчисленнями довжини кола за формулою C = $2 \cdot \pi \cdot R$? Це досить легко перевірити практично, хоча цей факт, очевидно, вимагає додаткової теоретичної і експериментальної оцінки фахівців. Може статись так, що для обчислень довжини кола і площі круга, обмеженого цим колом, існують різні значення числа π. При виводі формул для обчислення довжини кола і площі круга, обмеженого цим колом, ми маємо справу з двома різними числовими послідовностями і гіпотетична константа π в отриманих формулах: C = $2 \cdot \pi \cdot$R і S = $\pi \cdot R^2$, можливо, може мати різні, за величиною, значення. Таку можливість не так легко заперечити, опираючись на результати квадратури круга, описані вище і тисячолітню історію розрахунків цього числа, пов'язану з відношенням C/ D (D = 2·R), хоча авторська перевірка цього факту показує на узгодження нового значення числа π з обчисленням довжини кола за формулою C = $2\pi R$. Нове значення числа π відхиляється від прийнятого, приблизно, лише на 0.06, але для великих значень довжини радіуса кола, обчислювані на практиці величини для круглих, циліндричніх, сферичнних форм, що пов'язані з цим числом, наприклад, в астрономії і космонавтиці, матимуть досить значні відхилення, порівняно з попереднім значенням числа π, і це потрібно враховувати при розв′язанні практичних задач. Ось така істина.

Література

1. Танчук М. О. Поділ плоских кутів на n ≥ 2 рівних частин за допомогою циркуля й лінійки. XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р., Київ. Матеріали конференції. Том 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. – С. 317-318.

2. Танчук М.О. Трисекція плоских кутів і квадратура круга / Математика в школах України. – 2017. - №3. – С.13-19.