Физико-математические науки

УДК 517.9

Кочарли Акиф Фирудин
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры "Алгебра и геометрия"
Бакинский государственный университет

Kocharli Akif
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
Baku State University

Алиев Наджаф Ядулла
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры "Алгебра и геометрия"
Бакинский государственный университет

Aliyev Najaf
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
Baku State University

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{B}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\Omega})$

THEOREM FOR THE $\mathbf{B}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\Omega})$

Аннотация. *В данной статье доказывается весовая теорема вложения из класса $B^{\vec{l}}_{p,\alpha(\Omega)}$ в области с границей, удовлетворяющей условию Гельдера.*

Ключевые слова: *Гельдер, Минковский, финитность.*

Summary. *In this paper we prove a weighted embedding theorem from Besov class in a domain with a nonsmooth boundary.*

Key words: *Helder, Minkowski, finiteness.*

Постановка проблемы. Доказательство весовых теорем вложений в области с негладкой границей представляет определённую трудность. Известно, что такие области удовлетворяют и "условию рога",т.е. если x принадлежит области Ω, y −произвольная точка рога, то x + y ∈ Ω. При доказательстве теорем вложения используется интегральное представление функций.

Актуальность проблемы. Доказательство новых теорем вложений для различных классов функций дают достаточно полное представление о различных связях между весовыми пространствами $W_{p,\alpha}^{\vec{l}}, B_{p,\alpha}^{\vec{l}}$ при различных соотношениях индексов.

Цели и задачи. Целью данной работы является получить весовую теорему вложения функций из класса $B_{p,\alpha}^{l}$ в области с негладкой границей.

Через Ω будем обозначать область n- мерного эвклидова пространства E^n вида

$$\Omega = \{x;\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1},\ \ \varphi(x') < x_n < \infty\},$$

где функция, описывающая уравнение границы, удовлетворяет условию Гельдера

$$|\varphi(x') - \varphi(y')|^{l_n} \leq M\left(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^{l_i}\right),$$

(l_i-неотрицательные, $i = 1,2, \dots, n$)

Пусть для области Ω выполнено условие $\Omega + R(l) \subset \Omega$, где знаком + обозначена арифметическая сумма двух множеств.

Теорема. Пусть $f(x) \in B_{p,\alpha}^{\vec{l}}(\Omega)$, $1 < p < \infty$,

$$x = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{l_i} - \frac{1}{l_n}(\alpha - \beta) > 0, \alpha \geq \beta > -\frac{1}{p}$$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n), \nu_i\text{- целые } (i = 1,2, \dots, n)$$

Тогда $D^\nu f(x) \in L_{p,\beta}(\Omega)$ и имеет место оценка $\|D^\nu f\|_{L_{p,\beta}(\Omega)} \le C\|f\|_{B^{\vec{l}}_{p,\alpha}(\Omega)}$, причём C не зависит от $f(x)$.

Доказательство. В силу условий теоремы

$$\alpha - \beta = k + \mu \quad (k = 0,1,2, \dots , \qquad 0 \le \mu < 1).$$

Зафиксируем k. Докажем теорему сначала для случая $\alpha - \beta = k$ $(\mu = 0)$.Используя оценку из [1],подсчитывая степень при h ,вычисляя $L_{p,\beta}$норму, меняя порядок интегрирования и применяя неравенство Минковского находим

$$\left\|\pi^\beta(x) D^\nu f(x)\right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\|\pi^\beta(x) D^\nu \hat{f}_{r^\sigma}(x)\right\|_{L_p(\Omega)} +$$

$$+C\sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{l}_i} du \left\| \int_0^r \int_{E^n} \int_0^\infty h^{\mu_l+\varepsilon}\, \pi^\beta(x) \left|\psi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{h^\sigma}\right)\right| * \left|\xi_i\left(\frac{t}{h^{\sigma_i}}\right)\right| t^{\bar{l}_i} * \int_{y_n}^\infty \int_{\tau_{k-1}}^\infty * \dots * \int_{\tau_1}^\infty \left|\Delta_i^2(\delta t) D_i^{\bar{l}_i} f(x'+y'; x_n+\tau_0) + tl_i + \delta tul_i)\right|_{d\tau_0} * \dots * d\tau_{k-1} dt dy dh \right\|_{L_p(\Omega)} = J +$$

$$+C\sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{l}_i} du\, J_{(u)}^{(i)}$$

Здесь $\mu_l = -l - |\sigma| - \sigma_i - (\nu, \sigma) - k\sigma_n$.

Отсюда, делая элементарные преобразования, находим

$$J_{(u)}^{(i)} \le \left\| \int_0^\tau \int_{E^n} \int_0^\infty h^{\mu_l + \left(\frac{1}{p}+l_i\right)\sigma_i+\varepsilon} \left|\psi_i^{(\bar{\nu})}\left(\frac{y-\delta tul_i}{h^\sigma}\right)\right| * \left|\xi_i^*\left(\frac{t}{h^{\sigma_i}}\right)\right| F_i(x+y;t) dt dy dh \right\|_{L_p(E^n)} + \left\| \int_0^r \int_{E^n} \int_0^\infty h^{\mu_l + \left(\frac{1}{p}+l_i\right)\sigma_i+\varepsilon} \left|\psi_i^{(\bar{\nu})}\left(\frac{y-\delta tul_i}{h^\sigma}\right)\right| * \left|\xi_i^*\left(\frac{t}{h^{\sigma_i}}\right)\right| * \left|1 - \frac{\pi^\beta(x)}{\min\limits_{s=0,1,2} \pi^{\alpha-k}(x+y+tl_i+s\delta tl_i)}\right| * F_i(x+y+tl_i;t) dt dy dh \right\|_{L_p(\Omega)} = J_{(u)}^{(i,l)} + J_{(u)}^{(i,r)}$$

Займёмся оценкой $J_{(u)}^{(i,l)}$. Используя оценку

$$\left|\psi_i^{(\bar{\nu})}\left(\frac{y-\delta tul_i}{h^\sigma}\right)\right| \le \left|\bar{\psi}_i^{(\bar{\nu})}\left(\frac{y}{h^\sigma}\right)\right| (*) \text{ из } [1]$$

интегрируя по t, подсчитав степень при h, получаем

$$J_{(u)}^{(i,l)} \leq C \left\| \int_0^\tau \int_{E^n} h^{-l-|\sigma|+\varepsilon} \left| \bar{\psi}_i^{(\bar{\nu})}\left(\frac{y}{h^\sigma}\right) \right| * \|F_i(x+y,\cdot)\|_{L_p(0,\infty)} dydh \right\|_{L_p(E^n)}$$

Отсюда, по неравенству Минковского, затем по оценке для свёртки, находим

$$J_{(u)}^{(i,l)} \leq C\|F_i(\cdot,\cdot)\|_{L_{p,p}}(E^{n+1}) \int_0^r h^{-l+\varepsilon}\, dh \leq C\|F_i(\cdot,\cdot)\|_{L_{p,p}}(E^{n-1}).$$

Рассмотрим теперь $J_{(u)}^{(i,2)}$.

Используя оценку $(*)$ из $[1]$, неравенства Гельдера с показателями p и p',которое применим и интегралу по t,используя оценку 14 из $[2]$, получаем

$$J_{(u)}^{(i,2)} \leq C \left\| \begin{matrix} \int_{E^n} X(y;R)(\sum_{i=1}^n |y_i|^{l_i})^{-|\sigma|+\varepsilon} * \left|1 - \frac{\pi^\beta(x)}{\pi^{\alpha-k}(x+y)}\right| * \\ * \|F_i(x+y,\cdot)\|_{L_p(E^n)} dy \end{matrix} \right\|_{L_p(E^n)}$$

Так как интегрирования по y в правой части последнего выражения проводится фактически по ограниченному рогу $R(l)$, то очевидно, что мы только увеличим её записав это выражение в виде

$$J_{(u)}^{(i,2)} \leq C \left\| \int_{E^n} X(y;R)(\sum_{i=1}^n |y_i|^{l^i})^{-|\sigma|} * \left|1 - \frac{\pi^\beta(x)}{\pi^{\alpha-k}(x+y)}\right| \right.$$
$$\left. * \|F_i(x+y,\cdot)\|_{L_p(E^n)} \right\|_{L_p(E^n)}$$

Правая часть последнего неравенства совпадает с правой частью оценки 15 из $[2]$, поэтому $J_{(u)}^{(i,2)} \leq C\|F_i(\cdot,\cdot)\|_{L_{p,p(E^{n+1})}}$

Аналогично получаем оценку

$$J \leq C\|F_i(\cdot,\cdot)\|_{L_{p,\alpha}(\Omega)}.$$

Таким образом, собирая оценки, находим при $\alpha - \beta = k$

$$\|D^{\nu} f\|_{L_{p,\beta}(\Omega)} \leq C\|f\|_{B^{\vec{l}}_{p,\alpha}(\Omega)}$$

Пусть теперь $\alpha - \beta = k + \mu$ $,0 < \mu < 1$. Тогда из $(*)$ [1] имеем

$$\left\|\pi^{\beta}(x) D^{\nu} f(x)\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \left\|\pi^{\beta}(x) D^{\tilde{\nu}} f_{r\sigma(x)}\right\|_{L_p(\Omega)} + C\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\bar{l}_i} du \left\| \int_0^r \int_{E^n} \int_0^{\infty} h^{\mu_l + \left(\frac{1}{p} + l_i\right)\sigma_i} \left|\psi_i^{(\overline{\nu})}\left(\frac{y - \delta t u l_i}{h^{\sigma}}\right|\right. \right.$$

$$\left. * \left|\xi_i^*\left(\frac{t}{h^{\sigma_i}}\right)\right| \frac{\pi^{\beta}(x)}{\min\limits_{s=0,1,2} \pi^{\alpha-k}(x + y + tl_i + s\delta t l_i)} * F_i(x + y + tl_i; t) dt dy dh \right\|_{L_p(E^n)} =$$

$$= J + C\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\bar{l}_i} du\, J_{(u)}^{(i)}.$$

Дословное повторение схемы доказательства оценки для $J_{(u)}^{(i,2)}$ приводит нас к следующим оценкам

$$J_{(u)}^{(i)} \leq \mathrm{C}\|F_i(\cdot,\cdot)\|_{L_{p,p}}(E^{n+1}) \leq \mathrm{C}\|f\|_{b^{\vec{l}}_{p,\alpha(\Omega)}}$$

$$J \leq C\|f\|_{L^{l}_{p,\alpha(\Omega)}}$$

откуда

$$\|D^{\nu} f\|_{L_{p,\beta}(\Omega)} \leq C\|f\|_{B^{\vec{l}}_{p,\alpha}(\Omega)}$$

Теорема доказана.

Замечание. Данная теорема доказана в непредельном случае, т.е. $\chi > 0$

Заметим, что при $\chi = 0$ эта теорема неверна даже в невесомом случае при $p > 2$. При $\chi = 0$ эта теорема имеет место для

$$\alpha - \beta = k + \mu \quad (k = 0,1,2, \dots ,\ 0 \leq \mu < 1)\text{ , т.е при } \mu \neq 0.$$

Доказана также .

Теорема. Пусть $f(x) \in W_{p,\alpha}^{\vec{l}}(\Omega)$, $1 < p < q < \infty$,

$$\chi = 1 - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{l_i} - \frac{1}{l_n}(\alpha - \beta) > 0,$$

$\nu(\nu_1, \dots, \nu_n), \nu_i$-целые,$r_i = l_i \chi \quad (i = 1, \dots, n)$

$$\alpha \geq \beta > -\frac{1}{q}, \alpha \neq k - \frac{1}{p} \quad (k = 0,1,2, \dots)$$

Тогда $D^{\nu} f(x) \equiv f^{(\nu)}(x) \in b_{q,\beta}^{\bar{r}}$ и имеет место неравенство

$$\|D^{\nu} f\|_{b_{q.\beta(\Omega)}^{\bar{r}}} \leq C \|f\|_{W_{p,\alpha}^{\vec{l}}(\Omega)}$$

причем C не зависит от $f(x)$.

Литература

1. Одна теорема вложения для $B_{p,\alpha(\Omega)}^{\vec{l}}$ "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı respublika elmi konfransının materialı.
2. Некоторые весовые теоремы вложения в области с негладкой границей. Труды МИАН СССР. – 1974. - том 131. – с. 128-146.