Физико-математические науки

УДК 539.3

Сардарлы Назанин Азизагаевна

кандидат физико-математических наук,

преподаватель кафедры «Алгебра и геометрия»

Бакинский государственный университет

Sardarly Nazanin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Teacher of the Department of Algebra and Geometry

Baku State University

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО КОНУСА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

STUDY OF A STRESSED-DEFORMED STATE OF A TRANSVERSE-ISOTROPICCONE WITH A FIXED SIDE SURFACE

Аннотация. *Методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости изучается осесимметричная задача теории упругости для однородной трансверсально-изотропной конической оболочки.*

Раскрыты особенности напряженно-деформируемого состояния трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины.

Ключевые слова: *асимптотический метод, анизотропия, однородные решения, краевой эффект и т.д.*

Summary. *The method of asymptotic integration of the equations of the elasticity theory is used to study the axis-symmetric problem of the elasticity theory for a homogeneous transversely-isotropic conic shell. The features of the stress-strain state of a transversely-isotropic conic shell of variable density are revealed.*

Key words: *asymptotic method, anisotropy, homogeneous solutions, boundary effect, etc.*

Постановка проблемы. В работе рассмотрена краевая задача линейной теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса. Конус отнесен к сферической системе координат r, θ, φ, $(r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Боковая поверхность конуса жестко заделана:

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \text{ при } \theta = \theta_k.$$

Граничные условия на торцах конуса будем считать таковыми, что оболочка находится в равновесии.

Актуальность проблемы. Несмотря на развитие многосторонних исследований по статике тонких упругих оболочек, проблема создания точных и эффективных методов расчета оболочек продолжает сохранять свою актуальность. Одним из способов упрощения трехмерной краевой задачи является понижение размерности, которое может быть проведено, например, при учете малости каких-либо параметров, входящих в задачу. Понижение размерности при этом может быть осуществлено при помощи методов асимптотического анализа, заменяющих традиционные гипотезы теории оболочек. Чтобы рассчитать на прочность детали, сделанные из анизотропных материалов и испытывающие упругие деформации, необходимо теоретически определить напряжения и деформации в анизотропных телах. При решении задач подобного рода возникают значительные математические трудности, связанные с увеличением числа параметров. Вопрос о соотношении двумерных теорий и соответствующих трехмерных задач анизотропной теории упругости для оболочек переменной толщины не изучен.

Цели и задачи метода. Целью данной работы является подробное исследование поведения спектра основных краевых задач, когда боковая поверхность конуса жестко заделана. В работе использован асимптотический метод интегрирования.

Введение. Как известно, среди других упругих областей, ограниченных координатными поверхностями, четыре классические системы координат конической оболочки являются наиболее сложными для исследования и наиболее интересными в отношении результатов исследований. Объектом исследования являются уравнения, не поддающиеся решению с помощью стандартных методов, или отличающиеся громоздкостью стандартного решения.

Целью данной работы является подробное исследование поведения спектра основных краевых задач, когда боковая поверхность конуса жестко заделана.

Для достижения поставленной цели в данной работе рассмотрен и применен на практике один из вариантов асимптотического метода на основе метода однородных уравнений.

Практическая значимость работы состоит в том, что получены достаточно простые асимптотические формулы, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние конической оболочки переменной толщины.

Использование асимптотического метода интегрирования на основе метода однородных решений

Используя результаты работ [1; 2] и удовлетворяя однородные граничные условия, получена линейная система уравнений:

$$A_1 P_{\gamma_1}(\cos\theta_1)C_{1k} + A_1 Q_{\gamma_1}(\cos\theta_1)C_{2k} + A_2 P_{\gamma_2}(\cos\theta_1)C_{3k} + A_2 Q_{\gamma_2}(\cos\theta_1)C_{4k} = 0 \tag{1}$$

$$P'_{\gamma_1}(\cos\theta_1)C_{1k} + Q'_{\gamma_1}(\cos\theta_1)C_{2k} + P'_{\gamma_2}(\cos\theta_1)C_{3k} + Q'_{\gamma_2}(\cos\theta_1)C_{4k} = 0 \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений системы (1) является равенство нулю определителя системы. Раскрывая определитель, получено характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}\Delta(z,\theta_1,\theta_2) = 2A_1A_2\sin^{-1}\theta_1\sin^{-1}\theta_2 - A_1^2 D_{\gamma_1}^{(0,0)}(\theta_1,\theta_2)D_{\gamma_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2) - \\ - A_2^2 D_{\gamma_2}^{(0,0)}(\theta_1,\theta_2)D_{\gamma_1}^{(1,1)} + A_1A_2[D_{\gamma_1}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)D_{\gamma_2}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2) + \\ + D_{\gamma_2}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)D_{\gamma_1}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)] = 0\end{aligned}$$

Предполагая, что оболочка тонкостенная (ε-малый параметр), проведен анализ корней уравнения (3). Этот анализ важен, так как корнями этого детерминанта определяются однородные решения.

Трансцендентное уравнение (3) определяет счетное множество корней z_k, а соответствующие им постоянные C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k} пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки определителя системы. При малых ε и конечных z $\Delta(z,\theta_1,\theta_2)$ можно представить в виде

$$\Delta(z,\theta_1,\theta_2) = 4b_{22}[\gamma_2(\gamma_2+1)-\gamma_1(\gamma_1+1)]^2[z^2-\frac{9}{4}+2G_0]\varepsilon^2[1+o(\varepsilon^2)=0 \tag{3}$$

Положим $\theta_1=\theta_0-\varepsilon$, $\qquad \theta_2=\theta_0+\varepsilon$ (4)

где θ_0-угол раствора срединной поверхности оболочки, $\varepsilon-$ безразмерный параметр, характеризующий её толщину. Ниже будем предполагать, что $\varepsilon-$малый параметр, *а* $0<\xi_1<\theta_0<\xi_2<\dfrac{\pi}{2}$.

Подставляя (4) в (3) получим

$$D(z,\,\varepsilon,\,\theta_0)=\Delta(z,\theta_1,\,\theta_2)=0$$

Относительно корней функции $D(z,\,\varepsilon,\,\theta_0)$ можно сформулировать следующие утверждения.

Утверждение: Функция $D(z,\,\varepsilon,\,\theta_0)$ имеет три группы корней:

а) первая группа состоит из двух кратных нулей $z_1=-\dfrac{1}{2}$ и $z_2=\dfrac{1}{2}$.

б) вторая группа корней состоит из четырёх корней, которые при $\varepsilon\to 0$ имеют порядок $0\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$.

в) третья группа корней состоит из счётного множества корней, которые при $\varepsilon\to 0$ имеют порядок $0\left(\varepsilon^{-1}\right)$.

Доказано, что все остальные нули функции $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

Их можно разбить на три группы в зависимости от их поведения при $\varepsilon \to 0$. Возможны следующие предельные соотношения:

1) $\varepsilon z_k \to 0$ при $\varepsilon \to 0$
2) $\varepsilon z_k \to const$ при $\varepsilon \to 0$
3) $\varepsilon z_k \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$

Пусть главный член асимптотики z_k имеет вид

$z_k = \eta_0 \varepsilon^{-\alpha}, \quad \eta_0 = 0(1)$ при $\varepsilon \to 0$ (5) при $\varepsilon \to 0$.

Будем искать z_k в виде следующего разложения

$$z_k = \alpha_k \varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad k = 3,4,5,6 \qquad (5)$$

где $\alpha_k = \eta_0, \quad \alpha_k^{(0)} = 0$

$$\alpha_k^{(1)} = (40\alpha k_0)^{-1} [24(1+\nu)(G_0 - \nu_2) ctg^2 \theta_0 +$$
$$+ 5(4 + 5E_0 - 8\nu_1) E_0^{-1}]$$

Для построения асимптотики нулей в случае 2) $(\varepsilon z_k \to const$ при $\varepsilon \to 0)$ отыскиваем z_n

$(n = k - 6, \ k = 7,8,\dots)$ в виде $z_n = \varepsilon^{-1}\delta_n + 0(\varepsilon)$

Характер корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. $q > 0, q_1^2 - q_2 > 0, \mu_{1,2} = \pm s_i \delta_n, \mu_{3,4} = \pm s_2, \delta_n,$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \ q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \eta \pm i\beta = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_2 - q_1^2}}, \ q_1^2 < q_2$$

2. Корни характеристического уравнения (10) кратные

$$\mu_{1,2} = \eta_{3,4} = \pm \delta_n p, \ q_1 > 0, \ q_1^2 - q_2 = 0, \ p = \sqrt{q_1}$$

3. $q_1 < 0 \quad q_1^2 - q_2 \neq 0 \quad \mu_{1,2} = \pm i s \delta_n, \quad \mu_{3,4} = \pm i s_2 \delta_n$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \ q_1^2 < q_2$$

4. $q_1 < 0 \quad q_1^2 - q_2 = 0 \quad \mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm i\delta_n p$

$p = \sqrt{|q_1|}$

В случаях 1), 2)

$$P_z^k(\cos\theta) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{\Gamma(z+3/2)}\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)^{-1/2}\left\{\cos\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right] + O(z^{-1})\right\} \tag{6}$$

$$Q_z^k(\cos\theta) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{\Gamma(z+3/2)}\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{1/2}\left\{\cos\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right] + O(z^{-1})\right\},$$ для δ_n

соответственно получаем.

$$(s_2 - s_1)\sin(s_1 + s_2)\delta_n \pm (s_1 + s_2)\sin(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \tag{7}$$

$$\gamma\sin 2\beta\delta_n \pm \beta sh 2\gamma\delta_n = 0 \tag{8}$$

$$\sin 2p\delta_n \pm 2p\delta_n = 0$$

Результаты для случаев 3), 4) получаются из случаев 1), 2) заменой соответственно s_1, s_2, p на is_1, is_2, ip.

Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит.

Асимптотика корней получена в работе [2]. Характер корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

Приведено асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

Литература

1. Мехтиев М.Ф., Сардарова Н.А., Фомина Н.И. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса. Известия РАН, Механика твердого тела, 2003. - №2. – С. 61-70.
2. Мехтиев М.Ф., Сардарова Н.А. Построение однородных решений задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины / Труды ИММ НАН Азербайджана, Баку, 1997. – С. 239-244.