

Физико-математические науки

УДК 517.95

**Бабаханова Севда Шахы**

*кандидат физико-математических наук,*

*доцент кафедры «Математика»*

*Государственный Экономический Университет Азербайджана*

**Babakhanova Sevda**

*Candidate of Physical-Mathematical Science,*

*Docent of the Department of Mathematics*

*State Economy University of Azerbaijan*

**ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ  
СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ON AN EXPANSION IN EIGENFUNCTIONS OF A FAMILY OF  
DIFFERENTIAL OPERATORS**

*Аннотация.* В статье рассматривается сопряженное семейство операторов и доказывается конечность, числа их собственных значений.

*Ключевые слова:* спектр семейства операторов, полиномы, мероморфные функции, формула Лагранжа, скалярное произведение элементов.

*Summary.* The conjugate family of operators is considered in the paper and the finiteness, the numbers of their eigenvalues are proved.

*Key words:* spectrum of a family of operators, polynomials, meromorphic functions, Lagrange formula, scalar product of elements.

1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_{\lambda}(y) = y^{(2n)} + P_2(x, \lambda)y^{(2n-2)} + P_3(x, \lambda)y^{(2n-3)} + \dots + [P_{2n}(x, \lambda) + \lambda^{2n}]y \quad (1.1)$$

где  $P_k(x, \lambda)$ ,  $k = \overline{2, 2n}$  комплексны значение функции, суммируемые по  $x$  на  $[0, \infty)$  и полиномы по  $\lambda$  степени  $k-1$

$$P_k(x, \lambda) = \lambda^{k-1} P_{k1}(x) + \dots + P_{kk}(x)$$

Разобьем комплексную  $\lambda$ - плоскость на  $2n$  равных секторов  $\int_m$  таких, что

$$\frac{(m-1)\pi}{n} < \arg \lambda < \frac{m\pi}{n}, \quad m = \overline{1, 2n}$$

Каждый из  $S_m$  снова разделим на 2 равных сектора  $S'_m$  и  $S''_m$ .

Обозначим лучи, ограничивающие сектор  $S_m$  через  $M_m$  и  $M_{m+1}$ , а через  $T_m$  -его биссектрису.

Обозначим через  $D'_m(D''_m)$  совокупность функций, интегрируемых в квадрате по  $x$  на  $[0, \infty)$  при каждом  $\lambda \in S'_m(S''_m)$  удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $y(x, \lambda)$ ,  $\nu = \overline{0, 2n-1}$  существуют и абсолютно непрерывны по  $x$  в каждом конечном интервале  $[0, b]$   $b > 0$  для всех  $\lambda \in S'_m(S''_m)$
- 2)  $l_\lambda(y) \in L_2(0, \infty)$

Пусть заданы краевые условия.

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\nu j}(\lambda) y^{(j)}(0, \lambda) - \int_0^\infty K_\nu(x) y(x, \lambda) dx = 0 \quad \nu \in \overline{1, n} \quad (1.2)$$

где  $L_{\nu k}(\lambda)$  - мероморфные функции комплексного переменного  $\lambda$  такие, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$L_{\nu k}(\lambda) = L_P^{\nu k} \lambda^P \left[ 1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \quad (1.3)$$

$P$  – натуральное число или ноль. Формы  $U_\nu(y)$ ,  $\nu \in \overline{1, n}$  линейно независимы.

Пусть  $\lambda_0$  - фиксированное значение параметра  $\lambda$ , являющееся регулярной точкой всех функции  $L_{\nu k}(\lambda)$  одновременно.

Обозначим через  $D'_{Lm}(\lambda_0)(D''_{Lm}(\lambda_0))$  - совокупность всех функции  $y(x, \lambda) \in D'_{Lm}(D''_{Lm})$ , удовлетворяющих (1.2) при  $\lambda = \lambda_0$ .

Определим теперь оператор  $L(\lambda_0)$ : его область определения есть  $D'_{L_m}(\lambda_0)(D''_{L_m}(\lambda_0))$ , причем при  $y \in D'_m(\lambda_0)(D''_m(\lambda_0))$

$$L(\lambda_0)y = l_{\lambda_0}(y)$$

Пусть теперь  $\lambda$  - комплексный параметр, пробегающий регулярные точки всех функции  $L_{\lambda_k}(\lambda)$ . Тогда мы получим семейство операторов  $L(\lambda)$  с областью определения  $D'_{L_m}(\lambda)[D''_{L_m}(\lambda)]$  и при  $y \in D'_{L_m}(\lambda)[D''_{L_m}(\lambda)]$

$$L(\lambda)y = l_{\lambda}(y)$$

Рассуждая также, как и в [7], докажем следующее предложение.

**ТЕОРЕМА 1.1.** Если ранг формы  $U_{\nu}(y) = 0$  равен  $n$ , то области определения  $D'_{L_m}(\lambda)[D''_{L_m}(\lambda)]$  оператора плотны в  $L_2(0, \infty)$ .

2. Сейчас займемся описанием спектра семейства операторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Функцию  $y(x)$  назовем собственной функцией семейства  $L(\lambda)$ , если существует такое число  $\lambda = \lambda_j$ , что при  $y(x) \in D_L(\lambda_j)$

$$L(\lambda_j)y = 0$$

Число  $\lambda = \lambda_j$  назовем собственным значением семейства операторов.

Пусть  $y_S(x, \lambda)$ ,  $S = \overline{1, n}$  решения, построенные в [3].

Обозначим через

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Тогда уравнение для нахождения собственных значений семейства операторов  $L(\lambda)$  имеет вид

$$A(\lambda) = 0$$

Пусть выполняются условия

$$|P_{ki}(x)| \leq ce^{-\varepsilon x}, \quad i \leq k \quad (2.2)$$

$c = const$  для всех  $x \in [0, \infty)$

Пусть при  $\lambda \in T_m$ ,  $m = \overline{1, 2n}$ ,  $n = 2l$  ( $\lambda \in M_m, M_{m+1}, m = \overline{1, 2n}, n = 2l + 1$ )

$$A(\lambda) \neq 0 \quad (2.3)$$

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть выполняются условия (2.2) и (2.3), а  $K_i(x) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда множество собственных значений оператора  $L(\lambda)$  конечно для  $\lambda \in S'_m(S''_m)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Так же, как и в [3], легко доказывается конечность числа собственных значений семейства операторов  $L(\lambda)$  на границах секторов  $S'_m(S''_m)$ .

Пусть  $L(\lambda_0)$  – оператор с областью определения  $D'_{Lm}(\lambda_0)$  либо  $D''_{Lm}(\lambda_0)$  в зависимости от того точка  $\lambda_0$  принадлежит сектору  $S'_m$ , либо  $S''_m$ .

Сопряженным дифференциальным выражением к (1.1) будет выражение вида

$$l^*_\lambda(z) = [l_\lambda(z)]^* = z^{(2n)} + \overline{(P_2(x, \lambda)z)}^{2n-2} - \overline{(P_3(x, \lambda)z)}^{2n-3} + \dots + \overline{(P_{2n}(x, \lambda) + \lambda^{2n})z} \quad (2.4)$$

Обозначим через  $\overline{D}'_m(\overline{D}''_m)$  совокупность всех функций, определенных для  $l^*_\lambda(z)$  так же, как в  $D'_m(D''_m)$  для  $l_\lambda(y)$ . Очевидно, что  $y \in D'_m(D''_m)$  тогда и только тогда, когда  $z \in \overline{D}'_m(\overline{D}''_m)$ .

Нетрудно вычисляется, что если  $y \in D'_m(D''_m)$ , а  $z \in \overline{D}'_m(\overline{D}''_m)$  то имеет место формула Лагранжа

$$\int_0^\infty [l_\lambda(y)z - y\overline{l^*_\lambda(z)}] dx = [y, z]_0^\infty \quad (2.5)$$

где

$$[y, z]_0^\infty = \sum_{k=1}^{2n} \left[ (P_{2n-k}(x, \lambda)\overline{z})y^{(k-1)} - P_{2n-k}(\overline{z})'y^{(k-2)} + \dots + (-1)(P_{2n-k}(x, \lambda)\overline{z})y^{(k-1)} \right]_0^\infty$$

учитывая, что  $P_0 = 1$   $P_1 = 0$ .

Формулу (2.5) можно переписать в виде

$$(l_\lambda(y), z) - (y, l_\lambda^*(z)) = [y, z]_0^\infty \quad (2.6)$$

где  $(f, g)$  есть скалярное произведение элементов  $f$  и  $g$  в пространстве  $L_2(0, \infty)$ .

Учитывая тот факт, что если  $f \in D_m'(D_m'')$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\nu)}(x) = 0, \quad \nu = \overline{0, 2n-1}$$

формулу (2.6) можно записать так

$$(f, L^*g) = (f, l_\lambda^*g) - [f, g](0) \quad (2.7)$$

В свою очередь, формулу (2.7) можно преобразовать, введя сопряженные краевые условия  $V_\nu(z)$ , которые в точке  $\lambda = \lambda_0$  будут иметь вид

$$V_\nu(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} \beta_{\nu i}(\lambda_0) z^{(i)}(0, \lambda_0) = 0, \quad \nu = \overline{1, n} \quad (2.8)$$

Формы  $U_i, i = \overline{1, n}$  дополним какими-нибудь формами  $U_{n+1}, \dots, U_{2n}$  до линейно независимой системы  $2n$  форм  $U_i, i = \overline{1, 2n}$ . В силу их линейной независимости, переменные  $y(0, \lambda), y'(0, \lambda), \dots, y^{(2n-1)}(0, \lambda)$  можно выразить в виде линейных комбинаций форм  $U_i, i = \overline{1, 2n}$ . Подставим эти выражения в билинейную форму  $[f, g](0)$  в (2.7). (У нас роль  $f$  будут играть функции  $y$ , а роль  $g$  - функции  $z$ ). Тогда коэффициенты при переменных  $U_i, i = \overline{1, 2n}$  также будут линейными однородными формами от переменных  $g(0), g'(0), \dots, g^{(2n-1)}(0)$ . Обозначим эти формы в точке  $\lambda = \lambda_0$  через  $V_{2n}, \dots, V_1$  соответственно. Тогда формула (2.7) примет вид

$$(f, L^*g) = - \sum_{i=1}^{2n} U_i V_{2n+1-i} + (f, l_\lambda^*g) \quad (2.9)$$

Для построения сопряженного семейства операторов  $L^*(\lambda)$  построим его область определения.

Областью определения сопряженного семейства операторов  $L^*(\lambda_0)$ , обозначим ее через  $D_{L_m}^*(\lambda_0)[D_{L_m}^{**}(\lambda_0)]$ , будет совокупность функций  $z(x, \lambda) \in \overline{D}_m'(\overline{D}_m'')$ , где  $\overline{D}_m'(\overline{D}_m'')$  построено аналогично  $D_m'(D_m'')$  и удовлетворяющих (2.8).

При

$$L^*(\lambda_0)z = l_{\lambda_0}^*(z) - \sum_{i=1}^n \overline{\rho_i K_i(x)}$$

Где  $\rho_i, i = \overline{1, n}$ , произвольные постоянные.

Заставляя параметр  $\lambda$  пробегать множество всех регулярных точек всех функций  $L_{\nu k}(\lambda)$ , получим сопряженное к  $L(\lambda)$  семейство операторов  $L^*(\lambda)$  с областью определения  $D_{L_m}^*(\lambda)[D_{L_m}^{**}(\lambda)]$ .

В общем виде условия (2.8) запишутся в виде

$$V_\nu(z) = \sum_{i=1}^{2n1} \beta_{\nu i}(\lambda) z^{(i)}(0, \lambda) = 0, \nu = \overline{1, n}. \quad (2.10)$$

где  $\beta_{\nu k}(\lambda), \nu = \overline{1, n}, k = \overline{0, 2n-1}$ , в общем говоря, мероморфные функции комплексного переменного  $\lambda$ .

Построенное таким образом сопряженное семейство операторов действительно является сопряженным семейством.

### Литература

1. Бабаханова С.Ш. Пашаева Э.Э. Некоторое краткое разложение семейства дифференциальных функций / ДАН Аз.ССР №5, 1982.
2. Бабаханова С.Ш. Кратное разложение по собственным функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями. Рукопись деп. В ВИНТИ, №1152-82.