Физико-математические науки

УДК 517.95

Акимов А. А.

доцент, к.ф.-м.н., кафедра математического анализа

Стерлитамакский филиал БашГУ

Абдуллина Р. И.

магистр

Стерлитамакского филиала БашГУ

Akimov A. A.

Bashkir state university Sterlitamak branch

Abdullina R. I.

Master of the Bashkir state university Sterlitamak branch

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-ГРИНА ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ

CONSTRUCTION OF RHIEMAN-GREEN FUNCTION FOR ONE CASE

Аннотация: В работе рассматривается метод построения функции Римана-Грина, предложенный впервые Риманом. Доказано, что предложенный Риманом метод может быть примененн для любого уравнения с разделяющимися переменными.

Ключевые слова: функция Римана-Грина, задача Коши, преобразование Фурье.

Summary: In this paper we consider a method for constructing the Riemann-Green function, first proposed by Riemann. It is proved that the method proposed by Riemann can be applied to any equation with separable variables.

Key words: problem of Cauchy, Riemann-Green function, Fouier cosine transform.

Рассмотрим задачу Коши [1]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2a\frac{\partial U}{\partial x} - 2b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0,$$

$$U|_{y=y_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_0} = F(x),$$

где y_0 произвольная постоянная. Решение задачи будет иметь вид [2]

$$U(X,Y) = \frac{1}{2}\int_{X-Y+y_0}^{X+Y-y_0} R(x, y_0; X, Y)F(x)\,dx$$

Если мы бы смогли решить эту проблему некоторым другим методом, сравнение двух решений позволило бы получить функцию Римана-Грина $R(x, y_0;\ X, Y)$ в случае, когда x лежит между $X \pm (Y - y_0)$. Поскольку y_0 произвольная постоянная, то можно будет определить $R(x, y;\ X, Y)$ при $X - x$ лежащим между $\pm\,(Y - y)$. Аналогично, если данные Коши

$$U|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = G(y),$$

где x_0 произвольная постоянная, то решение будет иметь вид

$$U(X,Y) = \frac{1}{2}\int_{Y-X+x_0}^{Y+X-x} R(x_0, y; X, Y)G(y)\,dy.$$

Если решение возможно найти каким-нибудь другим способом, то сравнивая эти два решения можно найти $R(x, y;\ X, Y)$, когда $Y - y$ лежит между $\pm\,(X - x)$. Это справедливо, поскольку (a) решение задачи Коши единственно, и (b) функция Римана-Грина не зависит от формы кривой, на которой заданы условия Коши.

Впервые Риман применил данный метод к уравнению [3]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

где α произвольная постоянная. Он решил задачу Коши с условиями

$$U|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = G(y),$$

При $x = x_0 > 0$ с помощью косинус-преобразования Фурье по y и, сравнивая две формы одного и того же решения, получил в современной форме записи

$$R(x,y;X,Y)=\frac{X^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\cos\alpha\pi X^{\alpha-\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \cos\left[\lambda(Y-y)\times J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x)J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda X)\right.$$
$$\left.-J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda X)J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x)\right]d\lambda,$$

при Y – y, лежащим между $\pm$ (X – x). Затем Риман заметил [4], что каждая функция Бесселя может быть заменена определенным интегралом так, что функция V может быть выражена как тройной интеграл, который может быть сведен к гипергеометрической функции. Окончательный результат был записан Риманом в виде

$$R(x,y;X,Y)=\left(\frac{x}{X^{\alpha}}\right)P_{-x}(1+\xi),$$

где

$$\xi=\frac{(X-x)^2-(Y-y)^2}{2xX}.$$

Риман ограничился лишь проверкой правильности полученного результата, не раскрывая всех деталей, как он получил этот результат. Позднее Вебер в «Избранных работах» также не смог пролить свет на то, как Риман получил этот замечательный результат. Далее покажем, что предложенный Риманом метод может быть расширен до любого уравнения с разделяющимися переменными.

Если переменные в уравнении можно разделить, то само уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2a\frac{\partial U}{\partial x}+pU=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2b\frac{\partial U}{\partial y}+qU \qquad (1)$$

где a, p функции переменной x, a b, q функции переменной y. В этом случае, как обычно рассматривается пара уравнений

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+2a\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+(p+\lambda^2)\vartheta=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+2b\frac{\partial \varphi}{\partial y}+(p+\lambda^2)\varphi=0 \qquad (3)$$

где λ произвольная постоянная. Предположим, что $\vartheta_1(x,\lambda),\vartheta_2(x,\lambda)$ линейно-независимые решения уравнения (2), чей вронскиан

$$\vartheta_1 \frac{d\vartheta_2}{dx} - \vartheta_2 \frac{d\vartheta_1}{dx}$$

обозначим, как $W'(x,\lambda)$. Тогда $\varphi_1(y,\lambda), \varphi_2(y,\lambda)$ линейно-независимые решения уравнения (3), чей вронскиан будет $W"(y,\lambda)$.

Будем искать решение задачи Коши уравнения (1) в виде

$$U(x,y) = \int \{f_1(\lambda)\varphi_1(y,\lambda) + f_2(\lambda)\varphi_2(y,\lambda)\}\vartheta_1(x,\lambda)d\lambda,$$

где интегрирование ведется по конечному промежутку, который зависит от вида уравнения. Будем искать функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$U|_{y=y_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=y_0} = F(x),$$

где y_0 произвольная постоянная, что означает нужно найти функции $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$, такие, что

$$\int \{f_1(\lambda)\varphi_1(y,\lambda) + f_2(\lambda)\varphi_2(y,\lambda)\}\vartheta_1(x,\lambda)d\lambda = 0$$

$$\int \{f_1(\lambda)\varphi_1'(y,\lambda) + f_2(\lambda)\varphi_2'(y,\lambda)\}\vartheta_1(x,\lambda)d\lambda = F(x), \tag{4}$$

где $\varphi_i'(y,\lambda)$ обозначим $d\varphi i\,/dy$. Если

$$F(x) = \int f(\lambda)\vartheta_1(x,\lambda)d\lambda, \tag{5}$$

тогда условия (4) переходят

$$f_1(\lambda)\varphi_1(y_0,\lambda) + f_2(\lambda)\varphi_2(y_0,\lambda) = 0$$
$$f_1(\lambda)\varphi_1'(y_0,\lambda) + f_2(\lambda)\varphi_2'(y_0,\lambda) = f(\lambda),$$

откуда

$$f_1(\lambda) = -\frac{f(\lambda)\varphi_2(y_0,\lambda)}{W''(y_0,\lambda)}, \quad f_2(\lambda) = -\frac{f(\lambda)\varphi_1(y_0,\lambda)}{W''(y_0,\lambda)}.$$

Получаем

$$U(x,y) = \int f(\lambda)\{\varphi_1(y_0,\lambda)\varphi_2(Y,\lambda) - \varphi_1(Y,\lambda)\varphi_2(y_0,\lambda)\}\frac{\vartheta_1(X,\lambda)}{W''(y_0,\lambda)}d\lambda.$$

Если решение уравнения (4) имеет вид

$$f(\lambda) = \int \overline{\vartheta_1}(x,\lambda)F(x)dx,$$

тогда

$$U(X,Y)=\iint f(x)\frac{\vartheta_1(X,\lambda)\vartheta_1(x,\lambda)}{W''(y_0,\lambda)}\{\varphi_1(y_0,\lambda)\varphi_2(Y,\lambda)-\varphi_1(Y,\lambda)\varphi_2(y_0,\lambda)\}dxd\lambda.$$

Сравнивая это выражение решения с равенством

$$U(X,Y)=\frac{1}{2}\int\limits_{Y-X+y_0}^{Y+X-y_0} f(x)R(x_0,y;X,Y)dx,$$

получим

$$R(x,y;X,Y)=\pm 2\int\frac{\vartheta_1(X,\lambda)\overline{\vartheta_1}(x,\lambda)}{W''(y,\lambda)}\{\varphi_1(y,\lambda)\varphi_2(Y,\lambda)-\varphi_1(Y,\lambda)\varphi_2(y,\lambda)\}d\lambda, (6)$$

если значение x лежит между $X\pm(Y-y)$, в противном случае, значение интеграла равно нулю, при этом знак плюс берется, когда $Y>y$, минус, если $Y<y$. Если поменять местами переменные *x* и *y*, то получим, что функция V имеет вид

$$R(x,y;X,Y)=\pm 2\int\frac{\varphi_1(Y,\lambda)\varphi_1(y,\lambda)}{W''(x,\lambda)}\{\vartheta_1(x,\lambda)\vartheta_2(X,\lambda)-\vartheta_1(X,\lambda)\vartheta_2(x,\lambda)\}d\lambda, (7)$$

если решение уравнения

$$\int g(\lambda)\varphi_1(y,\lambda)=G(y)$$

имеет вид

$$g(\lambda)=\int\varphi(y,\lambda)G(y)dy,$$

в случае, когда y лежит между $Y\pm(X-x)$; если же y лежит за пределами указанного диапазона, то значение функции равно нулю, при этом знак плюс соответствует случаю, когда $X>x$, знак минус, когда $X<x$.

Наконец, две другие формулы для R могут быть получены путем замены индексов 1 и 2 между собой и изменением переменной W' (или W''). Это приводит к замене ϑ_1 и $\bar{\vartheta}_1$ на ϑ_2 и $\bar{\vartheta}_2$ соответственно. Все эти рассуждения носят достаточно формальный характер. Если аккуратно рассматривать все возможные случаи, которые могут возникнуть, основная идея может потеряться среди множества мелких деталей. Главное, что с помощью данной техники построения функции Римана-Грина могут быть решены многие краевые задачи.

Список литературы

1. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений / Дифференц. уравнения. - 1990. - Т. 26. - N 6. - С. 1023-1032.
2. Акимов А.А. О единственности решения задачи типа Неймана для уравнения Чаплыгина / Вестник Московского государственного областного университета. - 2013. - №4. - С. 38.
3. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Решение задачи Дарбу для телеграфного уравнения с отходом от характеристики / Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. - 2015. - №4. - С. 29-35.
4. Akimov A., Galiaskarova G. The solution of the Darboux problem for the telegrath equation with deviation from the characteristic / International Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2015. - Т. 103. - № 2. - С. 377-383.
5. Akimov A. On uniqueness Morawetz problem for the Chaplygin equation / International Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2014. - Т. 97. - № 3. - С. 369-375.
6. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Решение задачи Дарбу для телеграфного уравнения с отходом от характеристики / Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. - 2015. - № 4. - С. 29-35.