

Фізико-математичні науки

УДК 004.94

**Мірошник Костянтин Артурович**

магістрант кафедри передачі електричної енергії

Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут»

**Мирошник Константин Артурович**

магистрант кафедры передачи электрической энергии

Национальный технический университет

«Харьковский политехнический институт»

**Miroshnyk Kostiantyn**

master of the department of electric power transmission

The National Technical University

"Kharkiv Polytechnic Institute"

**РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ЛЕП МЕТОДОМ ДЗЕРКАЛЬНИХ  
ВІДОБРАЖЕНЬ У ПРОГРАМНОМУ СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD  
РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ЛЭП МЕТОДОМ ЗЕРКАЛЬНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MATHCAD  
COMPUTATION OF ELECTRICAL PARAMETERS OF ELECTRICITY  
TRANSMISSION LINES BY THE METHOD OF MIRROR CHARGES  
IN THE MATHCAD SOFTWARE ENVIRONMENT**

**Анотація:** У статті розглянуто використання програмного середовища Mathcad для реалізації оціночного розрахунку електричних параметрів ЛЕП методом дзеркальних відображень.

**Ключові слова:** метод дзеркальних відображень, розрахунок параметрів ЛЕП, програмне середовище Mathcad.

**Аннотация:** В статье рассмотрено применение программной среды Mathcad для реализации оценочного расчёта электрических параметров ЛЭП методом зеркальных отображений.

**Ключевые слова:** метод зеркальных отображений, расчёт параметров ЛЭП, программная среда Mathcad.

**Summary:** The article describes the using of Mathcad software environment for the computation of the electric parameters of electricity transmission lines by the method of mirror charges.

**Key words:** the method of mirror charges, computation of the parameters of electricity transmission line, Mathcad software environment.

### **Теоретичні відомості**

#### Метод дзеркальних відображень

Для розрахунку електростатичних полів, особливо обмежених якоюсь провідною поверхнею правильної форми або в яких є геометрично правильної форми межа між двома діелектриками, широко застосовується розрахунковий прийом, який називають методом дзеркальних відображень. Розрахунок поля заряджених провідників, розташованих поблизу плоских поверхонь, які обмежують провідне середовище, зводиться за допомогою методу дзеркальних відображень до розрахунку поля декількох провідників при відсутності провідного середовища.

Розглянемо поле прямолінійного дроту, розташованого на відстані  $h$  від плоскої поверхні провідного середовища. Це відповідає, наприклад, дроту, підвішеному на висоті над поверхнею землі. Усі лінії напруженості поля, які починаються на позитивно зарядженому дроті, закінчуються на поверхні провідного середовища, де з'являється індуктований негативний заряд. Поле визначається як зарядом дроту, так і усім зарядом, розподіленим по поверхні провідного середовища. Розподіл індуктованого заряду з умов задачі невідомо і так само підлягає визначенню.

На перший погляд завдання розрахунку поля в такій системі здається досить складним. Проте воно вирішується дуже просто за допомогою методу дзеркальних відображень. Усунемо провідне середовище і замінимо його дротом, що є дзеркальним відображенням реального дроту у поверхні розділу, та яке має заряд тієї ж величини, що і заряд реального дроту, але протилежного знаку.

Дійсний дріт і його дзеркальне відображення становлять двохпровідну лінію. Площина, розташована посередині між дійсним дротом і його дзеркальним відображенням, є поверхнею рівного потенціалу. У дійсних умовах поверхня провідного середовища якраз збігається з цією площиною і також є поверхнею рівного потенціалу. Звідси випливає, що якщо замінити провідне середовище дзеркальним відображенням дроту зі зміною знаку заряду, то в області над провідним середовищем поле залишиться таким самим, як і в дійсних умовах. В цьому і полягає метод дзеркальних відображень.

Цей метод можна застосовувати і при будь-якій кількості дротів, протягнутих паралельно один одному і паралельно плоскій поверхні, що обмежує провідне середовище. Кожен провід повинен бути дзеркально відображений у поверхні провідного середовища зі зміною знаку заряду, після чого провідне середовище може бути подумки вилучено, та розглянуто поле сукупності дійсних дротів і їх дзеркальних відображень. В такому полі площина, розташована на місці поверхні провідного середовища, є поверхнею рівного потенціалу, так як заряди протилежних знаків розміщені симетрично відносно цієї площини (рис. 1). Знайдене таким шляхом поле і буде дійсним полем в області над поверхнею провідного середовища.

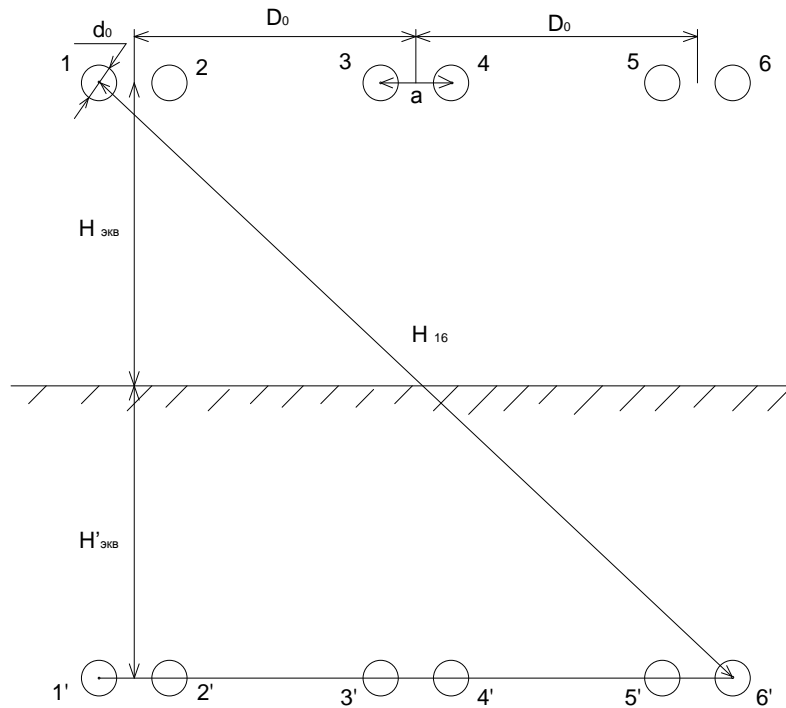


Рис. 1. Схема заміщення трифазної ЛЕП з двома складовими у фазі

В якості системи заряджених тіл розглянемо багатопровідну лінію з  $n$  досить довгих дротів з зарядом  $\tau_k$  на одиницю довжини (індекс заряду відповідає номеру проводу), протягнутих паралельно поверхні землі. Висота підвісу і радіус кожного дроту відомі. Відома також електрична проникність  $\epsilon$  середовища, поблизу дротів.

Візьмемо у діелектрику деяку довільну точку  $M$  (рис.2) і знайдемо її потенціал. Потенціал точки  $M$  дорівнює сумі потенціалів, створених кожним дротом і його дзеркальним зображенням.

Складова потенціалу точки  $M$  від дроту 1 і його дзеркального зображення запишеться наступним чином (постійну, з точністю, до якої визначається потенціал, опускаємо):

$$\Phi_{m1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{1m}}{a_{1m}}$$

де  $b_{1m}$  - є відстань точки  $M$  до дзеркального зображення першого дроту;  $a_{1m}$  - є відстань точки  $M$  до першого дроту.

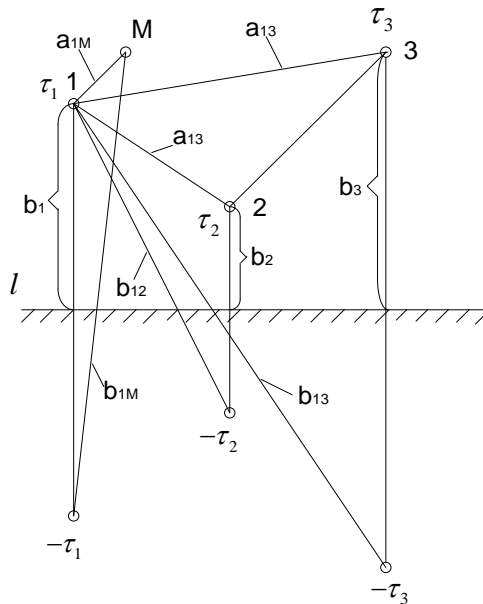


Рис 2. Модель розрахунку за методом дзеркальних відображень

Будемо вважати, що висоти підвісу дротів над землею на багато більше радіусів цих дротів. При цьому електричні осі практично співпадають з геометричними.

Складова потенціалу точки М від другого дроту і його дзеркального зображення:

$$\Phi_{m2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{2m}}{a_{2m}}$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \Phi_{m1} + \Phi_{m2} + \Phi_{m3} + \dots + \Phi_{mn} = \\ &= \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{1m}}{a_{1m}} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{2m}}{a_{2m}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{3m}}{a_{3m}} + \dots + \tau_n \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{nm}}{a_{nm}} \end{aligned}$$

Потенційні коефіцієнти

Перша група формул Максвелла. Точка М може бути поміщена на поверхню першого дроту. При цьому  $\varphi_m = \varphi_1$ ,  $b_m = 2h_1$ ,  $a_{m1} = r_1$ ,  $b_{m2} = b_{12}$  - відстань першого дроту до дзеркального зображення другого дроту,  $a_{m2} = a_{12}$  - відстань першого дроту до другого дроту і т. д.:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2h_{12}}{r_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2h_{13}}{r_{13}} + \dots + \tau_n \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2h_{nm}}{r_{nm}}$$

Коефіцієнти при зарядах  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  та ін. залежать тільки від геометричних розмірів тіл, їх взаємного розташування та від властивостей середовища. Вони не залежать ні від кількості, ні від знаку зарядів і потенціалів.

Для скорочення запису останню строку та інші аналогічні їй запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \tau_1 a_{11} + \tau_2 a_{12} + \tau_3 a_{13} + \dots \\ \varphi_2 = \tau_1 a_{21} + \tau_2 a_{22} + \tau_3 a_{23} + \dots \\ \varphi_3 = \tau_1 a_{31} + \tau_2 a_{32} + \tau_3 a_{33} + \dots \end{cases}$$

Цю систему рівнянь прийнято називати першою групою формул Максвеллу.

Тут:

$$\begin{cases} a_{km} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b_{km}}{a} \\ a_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{h_k}{r_k} \end{cases}$$

Коефіцієнт  $a_{km} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b_{km}}{a}$ . Так як  $b_{kT} = b_{mT}$  і  $a_{mT} = a_{kT}$ , то  $a_{kT} = a_{mT}$ .

Коефіцієнти  $a$  називають потенційними коефіцієнтами. Розмірність їх дорівнює розмірності одиниці довжини, поділеної на фарад.

Так як у всіх коефіцієнтів  $a$  під знаком логарифма стоїть дріб, чисельник якої завжди більше знаменника, то всі коефіцієнти  $a$  додатні.

Коефіцієнтам  $a$  може бути дано таке тлумачення: нехай заряди всіх дротів, крім першого, дорівнюють нулю

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0, \quad a\tau_1 = 1$$

Тоді,  $\varphi_1 = a_{11}$  тобто  $a_{11}$  чисельно дорівнює потенціалу першого дроту, якщо на першому проводі знаходиться одиничний заряд, а заряди на

інших дротах відсутні. Аналогічно  $a_{12}$  чисельно дорівнює потенціалу другого дроту в тих самих умовах. Система дозволяє підрахувати потенціали заряджених тіл за відомими загальними зарядами тіл.

Для розрахунку ємності фази необхідно мати на ній максимальну фазну напругу. Тому розрахунок повинен проводитися для кожної фази окремо, при максимальній напрузі на фазі для якої проводиться розрахунок. Визначаємо напругу на інших фазах в момент, коли на розрахунковій  $U = U_{\phi}$ .

Простіше всього це зробити виходячи з векторної діаграми напруги (рис. 3). Якщо зафіксувати момент часу, то напруги на фазах в цей момент часу будуть рівні проекції на дійсну вісь. Як видно з векторної діаграми напруга на розрахунковій фазі дорівнює  $U_{\phi}$ , а на двох інших  $-0,5 \cdot U_{\phi}$ . Тому для розрахунку ємності систему рівнянь необхідно вирішити три рази змінюючи  $U$  відповідно до таблиці 1.

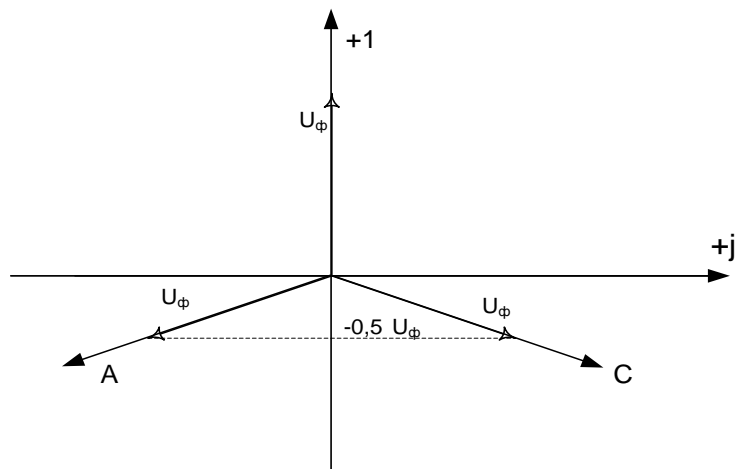


Рис. 3. Векторна діаграма напруги на фазах

**Таблиця 1. Значення напруги на кожній з фаз ЛЕП**

	$U_A$	$U_B$	$U_C$
$C_A$	$U_{\phi}$	$-0,5U_{\phi}$	$-0,5U_{\phi}$
$C_B$	$-0,5U_{\phi}$	$U_{\phi}$	$-0,5U_{\phi}$
$C_C$	$-0,5U_{\phi}$	$-0,5U_{\phi}$	$U_{\phi}$

Де  $U_{\phi}$  – значення фазної напруги.

## **Опис алгоритму функції SE, що реалізує метод дзеркальних відображень**

Кафедрою передачі електричної енергії НТУ «ХП» метод дзеркальних відображень було реалізовано у вигляді функції користувача SE у програмному середовищі Mathcad, на вхід якої подається крок розщеплення фази ( $a$ ), еквівалентна висота підвісу дротів ( $He$ ), відстань між осями фаз ( $do$ ), число складових у фазі ( $n$ ), радіус дроту поділений на 20 ( $ro$ ), номінальна напруга ЛЕП ( $U$ ).

Реалізація методу здійснюється у наступній послідовності (алгоритм методу):

Спочатку в програмі задається кількість складових у кожній фазі, також загальна кількість складових в двох фазах, потім загальна кількість складових в лінії. Наступний крок програми – розрахунок кута  $\alpha$  і еквівалентного радіусу розщеплення дроту ( $rr$ ). Залежно від кількості складових у фазі складається геометрична модель фазного дроту, виконується розрахунок власних і взаємних коефіцієнтів, визначається значення довжин відрізів  $H_i$  і  $D_i$ , формується система алгебраїчний рівнянь (СЛАР), яка вирішується три рази при різних значеннях потенціалу на дроті. Це викликано необхідністю адаптації методу дзеркальних відображень до розрахунку трифазного поля. В результаті отримуємо вектор стовпець ( $K$ ) зі значеннями зарядів, далі визначаємо величини зарядів на кожному дроті і значення максимального заряду, визначаємо значення максимального заряду і номер дроту з максимальним зарядом. Після цього виконується розрахунок ємності кожної фази, розраховується напруженість на дроті, далі розраховується напруга на дроті. Потім визначаємо значення максимальної напруженості ( $E_{mx}$ ), робочу ємність лінії, хвильовий опір ( $Z_v$ ) і натуральну потужність ( $P_n$ ). Потім задається вектор - стовпець з результатами, і задається команда виводу результатів.



На виході функції СЕ маємо вектор-стовпець з наступними результатами:

- 1)  $I_q$  – номер дроту з максимальним зарядом;
- 2)  $Q_{max}$  – значення максимального заряду;
- 3)  $i_E$  – номер дроту з максимальною напруженістю;
- 4)  $E_{max}$  – максимальне значення напруженості на дроті;
- 5)  $C_a$  – ємність фази А;
- 6)  $C_b$  – ємність фази В;
- 7)  $C_c$  – ємність фази С;
- 8)  $C_0$  – робоча ємність ЛЕП;
- 9)  $Z_v$  – хвильовий опір ЛЕП;
- 10)  $P_n$  – натуральна потужність ЛЕП;

Далі наведено текст функції користувача СЕ, реалізованої у середовищі Mathcad та пояснення до неї (рис. 4).

ORIGIN := 1

$$LF(1, f, d) := \begin{cases} lf \leftarrow (d-1) \cdot (3-d) \cdot 1 + f \cdot \left[ (d-2) \cdot \frac{d-1}{2} \right] \\ lf \end{cases}$$

```

CE(a, He, do, n, ro, U, Emx, qmx) :=
  nf1 ← n
  nf2 ← n
  nf3 ← n
  n2f ← nf1 + nf2
  np ← nf1 + nf2 + nf3
  α ←  $\frac{2 \cdot \pi}{n}$ 
  rr ←  $\frac{a}{200}$  if a ≠ 0
  rr ← 0 otherwise
  HET ←  $\frac{n}{2}$ 
  Man ← HET - floor(HET)
  if Man ≤ 0
    for i ∈ 1..np
       $h_i \leftarrow rr \cdot \cos\left[\pi - \alpha \cdot (i-1) + \frac{\alpha}{2}\right]$ 
       $D_i \leftarrow rr \cdot \sin\left[\pi - \alpha \cdot (i-1) + \frac{\alpha}{2}\right]$ 
       $h_i \leftarrow He - h_i$ 
      if i > n
         $D_i \leftarrow do + D_i$  if i ≤ 2·n
         $D_i \leftarrow 2 \cdot do + D_i$  if i > 2·n
      D
  if Man > 0
    for i ∈ 1..np
       $h_i \leftarrow rr \cdot \cos[\pi - \alpha \cdot (i-1)]$ 
       $D_i \leftarrow rr \cdot \sin[\pi - \alpha \cdot (i-1)]$ 
       $h_i \leftarrow He - h_i$ 
      if i > n
         $D_i \leftarrow do + D_i$  if i ≤ 2·n
         $D_i \leftarrow 2 \cdot do + D_i$  if i > 2·n
    D
  
```

Присвоєння значень кількості складових дротів у одній, двох та трьох фазах

Визначення еквівалентного радіусу

Розрахунок відстані між фазами в залежності від радіусу розщеплення

```

for i ∈ 1..np
  for j ∈ 1..np
    if i ≠ j
      
$$dr_{i,j} \leftarrow \sqrt{(D_i - D_j)^2 + (h_i - h_j)^2}$$

      
$$hr_{i,j} \leftarrow \sqrt{(D_i - D_j)^2 + (h_i + h_j)^2}$$

    otherwise
      
$$dr_{i,j} \leftarrow \frac{r_0}{200}$$

      
$$hr_{i,j} \leftarrow 2 \cdot h_i$$

  for d ∈ 1..3
    nf ← 1 + LF(nf1, nf1 + nf2, d)
    kf ← nf1 + LF(nf2, nf2 + nf3, d)
    u1_d ← 1 - LF(1, 1, d) · 1.5
    u2_d ← -0.5 + LF(1, 0, d) · 1.5
    u3_d ← -0.5 + LF(0, 1, d) · 1.5
    for m ∈ 1..np
      for k ∈ 1..np + 1
        if k ≠ np + 1
          
$$ko_{m,k} \leftarrow \ln \left( \frac{hr_{m,k}}{dr_{m,k}} \right)$$

          
$$V_{m,k} \leftarrow ko_{m,k}$$

        otherwise
          if m ≤ nf1
            C1 ← m
            
$$ko_{m,k} \leftarrow u1_d$$

            
$$Z_m \leftarrow u1_d$$

          if (m > nf1) · (m ≤ n2f)
            
$$ko_{m,k} \leftarrow u2_d$$

            
$$Z_m \leftarrow u2_d$$

          if (m > n2f) · (m ≤ np)
            
$$ko_{m,k} \leftarrow u3_d$$

            
$$Z_m \leftarrow u3_d$$

          ko

```

Визначення значень довжини відрізків  $D_i$  и  $H_i$

Визначення значень векторів повороту напруги

<pre> K ← Isolve(V,Z) qs ← 0 for i ∈ nf..kf     fn ← nf     fk ← kf     <math>qs ← qs + \frac{K_i}{fk - fn + 1}</math> for j ∈ nf..kf     if <math> K_j  &gt; qmx</math>         qmx ← <math>K_j</math>         iq ← j qs ← 55.56·qs qm ← qmx·55.56·U·0.81649·10<sup>-9</sup> fk ← kf Cf<sub>d</sub> ← qs·(fk - fn + 1) for j ∈ nf..kf     Ex ← 0     Eh ← 0     for i ∈ 1..n         for k ∈ 1..2           k1 ← -1 if k &lt; 2           k1 ← 1 otherwise           if (i ≠ j)·(k1 ≠ -1)             <math>t ← (D_i - D_j)^2 + (h_i + k1·h_j)^2</math>             <math>Ex ← Ex - \frac{k1·K_i·(D_i - D_j)}{t}</math>             <math>Eh ← Eh - \frac{k1·K_i·(h_j + k1·h_i)}{t}</math>           break otherwise </pre>	<p>} Отримання значень зарядів</p> <p>} Визначення величини зарядів на кожному з дротів</p> <p>} Визначення значення максимального заряду</p> <p>} Визначення номеру дроту і значення максимального заряду</p> <p>} Розрахунок ємності кожної фази</p> <p>} Розрахунок напруженості на кожному дроті</p>
--	--

$Em_j \leftarrow 2 \cdot \sqrt{Ex^2 + Eh^2} + \frac{K_j}{\frac{ro}{100}}$	}	Розрахунок значення максимальної напруженості
if $Emx < Em_j$ $Emx \leftarrow Em_j$ $iE \leftarrow j$		
$Em_j \leftarrow Em_j \cdot U \cdot 0.81649 \cdot 10^{-2}$		
$K_j \leftarrow \left( K_j \cdot \frac{U}{1.2247 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot 0.5556 \cdot 10^{-10}$		
$z \leftarrow 1$		
$Emx \leftarrow Emx \cdot U \cdot 0.81649 \cdot 10^{-2}$		
$Co \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^d Cf_i}{3}$	}	Розрахунок значення ємності ЛЕП
$zv \leftarrow \frac{3436.4}{Co}$	}	Розрахунок хвильового опору ЛЕП
$Pn \leftarrow \frac{U^2}{zv \cdot 10^{-3}}$	}	Розрахунок натуральної потужності ЛЕП
$rez \leftarrow \begin{pmatrix} iq \\ qm \\ iE \\ Emx \\ Cf_1 \\ Cf_2 \\ Cf_3 \\ Co \\ zv \\ Pn \end{pmatrix}$	}	Формування вектору результатів
$rez$		

Рис. 4. Текст функції користувача СЕ, реалізованої у середовищі Mathcad

У якості прикладу визначимо електричні параметри ЛЕП з наступними конструктивними параметрами: крок розщеплення дротів фази (a) = 40 см, еквівалентна висота підвісу дротів (He) = 10 м, відстань між

осями фаз ( $d_0$ ) = 12 м, число складових у фазі ( $n$ ) = 3, радіус дроту поділений на 20 ( $r_0$ ) =  $\frac{27,5}{20} = 1,375$  мм, номінальна напруга ЛЕП ( $U$ ) = 500 кВ.

$$\alpha := \text{CE}(40, 10, 12, 3, 1.375, 500, 0, 0)$$

		1	
$\alpha =$	1	5	Номер дроту з максимальним зарядом
	2	$1.66 \cdot 10^{-6}$	Значення максимального заряду
	3	5	Номер дроту з максимальною напруженістю
	4	21.73	Значення максимальної напруженості на дроті
	5	11.573	Ємність фази А
	6	12.187	Ємність фази В
	7	11.573	Ємність фази С
	8	11.778	Робоча ємність ЛЕП
	9	291.764	Хвильовий опір ЛЕП
	10	$8.569 \cdot 10^5$	Натуральна потужність ЛЕП

У результаті розрахунку було отримано наступні показники:

- 1)  $I_q = 5$  – номер дроту з максимальним зарядом (середній дріт середньої фази);
- 2)  $Q_{\max} = 1,66 \cdot 10^{-6}$  Кл – значення максимального заряду;
- 3)  $i_E = 5$  – номер дроту з максимальною напруженістю (середній дріт середньої фази);
- 4)  $E_{\max} = 21,73$  кВ/см – максимальне значення напруженості на дроті;
- 5)  $C_a = 11,573$  мкФ – ємність фази А;
- 6)  $C_b = 12,187$  мкФ – ємність фази В;
- 7)  $C_c = 11,573$  мкФ – ємність фази С;
- 8)  $C_0 = 11,778$  мкФ – робоча ємність ЛЕП;
- 9)  $Z_v = 291,764$  Ом – хвильовий опір ЛЕП;
- 10)  $P_n = 856,9$  МВт – натуральна потужність ЛЕП;

Отримані значення цілком відповідають параметрам реальних ЛЕП схожого конструктивного виконання.

**Висновок:** Запропонована функція користувача дозволяє просто, ефективно та з достатньо високою точністю проводити оціночний

розрахунок електричних параметрів повітряних ліній електропередачі виходячи з їх конструктивних параметрів.

### **Література**

1. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие/ Л.А. Потапов. – Брянск: БГТУ, 2009. – 200 с.
2. Теоретична електротехніка (теорія електромагнітного поля). Ч.1: Навчальний посібник./ К.К. Кім. – СПб .: Петербурзький державний університет шляхів сполучення, 2011. - 60 с.
3. Теоретические основы электротехники. Основы теории электромагнитного поля: Учеб. пособие./ Зима Т.Е., Зима Е.А. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 198 с.