Физико-математические науки

УДК 517.95

Акимов А.А.

доцент, к.ф.-м.н., кафедра математического анализа

Стерлитамакский филиал БашГУ

Абдуллина Р.И.

магистр

Стерлитамакский филиал БашГУ

Akimov A.A.

Bashkir state university Sterlitamak branch

Abdullina R. I.

Master, Bashkir state university Sterlitamak branch

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ БАЛКИ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

MATHEMATICAL MODELING OF THE DEFORMATION OF THE BEAM WITH CLAMPED-CLAMPED ENDS

Аннотация. В работе изучена задача с начальными условиями для уравнения балки с заделанными концами. Задача решалась двумя способами: в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций одномерной спектральной задачи и при помощи конечно-разностных аппроксимаций получено численное решение. Получено количественное совпадение результатов численных и аналитических расчетов деформации балки.

Ключевые слова: колебание балки, уравнение Эйлера, начально-граничные условия.

Summary. The paper deals with a problem with initial conditions for a beam equation with embedded ends. The problem was solved in two ways: as a sum of the Fourier series in the system of eigenfunctions of a one-dimensional spectral problem, and using finite-difference approximations, a numerical

solution was obtained. The quantitative coincidence of the results of numerical and analytical calculations of beam deformation is obtained.

Key words: oscillations of a beam, the Euler equation, the initial-boundary conditions.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение струны. В данной работе мы рассмотрим нелинейное уравнение поперечных колебаний упругой балки

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

в цилиндрической области $\Omega = I \times (0, \infty), I = (0, l)$, где $a^2 = \frac{EI}{\rho h}$, ρ – плотность материала балки; h– толщина балки, E – модуль Юнга; $I = \frac{h^3}{12}$ – момент сечения балки, l – длина балки. Рассмотрим колебания балки с закрепленными концами. В этом случае граничные условия будут иметь вид

$$u(l,t) = u(0,t) = u_x(l,t) = u_x(0,t) = 0, \ t > 0 \tag{2}$$

а начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in (0,l) \tag{3}$$

Решение задачи (1) - (3) будем искать в классе $C_{x,t}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Для обоснования корректности поставленной задачи применим методы спектрального анализа. Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, получим следующую спектральную задачу:

$$X^{IV}(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < l, \tag{4}$$

$$X(0) = X'(0) = X(l) = X'(l) = 0. \tag{5}$$

Найдем собственные значения и соответствующие им функции поставленной задачи. Пусть $\lambda = -\omega^4, \omega > 0$. Тогда общее решение уравнения (5) определим в следующем виде:

$$X(x) = \alpha_1 ch\omega x + \alpha_2 sh\omega x + \alpha_3 \cos\omega x + \alpha_4 \sin\omega x. \qquad (6)$$

где α_i – произвольные постоянные. Удовлетворяя функцию (6) первым двум условиям из (5) , находим $\alpha_3 = -\alpha_1, \alpha_4 = -\alpha_2$. Тогда функция (6) примет вид

$$X(x) = \alpha_1 (ch\omega x - \cos\omega x) + \alpha_2 (sh\omega x - \sin\omega x). \qquad (7)$$

Удовлетворяя функцию (7) двум последним граничным условиям из (5), получим

$$\begin{cases} \alpha_1 (ch\omega l - \cos\omega l) + \alpha_2 (sh\omega l - \sin\omega l) = 0 \\ \alpha_1 (sh\omega l + \sin\omega l) + \alpha_2 (ch\omega l - \cos\omega l) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим трансцендентное уравнение

$$X(x) = \alpha_1 (ch\omega x - \cos\omega x) + \alpha_2 (sh\omega x - \sin\omega x). \qquad (9)$$

Приравнивая определитель системы к нулю, получаем трансцендентное уравнение

$$ch\omega l \cdot \cos\omega l = 1 \qquad (10)$$

для вычисления собственных значений. В работе [1] установлено, что

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots, \qquad (11)$$

При этом при больших *n* справедлива асимптотическая формула

$$\omega_n \approx \frac{\pi}{2l}(2n-1). \qquad (12)$$

Из системы (8) с учетом условия (10) выразим неизвестные коэффициенты и подставим в (7). В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$X_n(x) = \frac{\sin\omega_n l}{1 + \cos\omega_n l}(\cos\omega_n x - ch\omega_n x) + sh\omega_n x - \sin\omega_n x. \qquad (13)$$

или

$$X_n(x) = \frac{sh\omega_n(x - l/2)}{ch(\omega_n l/2)} - \frac{\sin\omega_n(x - l/2)}{\cos(\omega_n l/2)}. \qquad (13)$$

Следуя работе [1], введем функции

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \qquad (14)$$

где

$$\|X_n\| = \sqrt{l}\left|tg\frac{\omega_n l}{2}\right|. \qquad (15)$$

Тогда решение задачи (1) - (3) примет вид [1]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)Y_n(x), \qquad (16)$$

где

$$T(t) = \varphi_n \cos a\omega_n^2 t + \frac{\psi_n}{a\omega_n^2}\sin a\omega_n^2 t, \qquad (17)$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x)Y_n(x)dx, \;\; \psi_n = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)dx. \qquad (18)$$

Наряду с точным аналитическим решением задачи (1)-(3) рассмотрим численное решение этой задачи методом конечных разностей.

Область изменения переменных разобьем прямыми $x = ih, i = 1..n$ и $t = j\tau, j = 1.,2,...$ на прямоугольную сетку. Значения в узлах сетки обозначим с помощью индексов $u(x_i, t_j) = u(ih, j\tau) = u_i^j$, а производные заменим разностными отношениями:

$$u(0,t) = 0 \to u_0^j = 0, \;\; u(l,t) = 0 \to u_n^j = 0 \qquad (15)$$

$$u_x(0,t) = 0 \to u_1^j = u_0^j, \;\; u_x(l,t) = 0 \to u_{n-1}^j = u_n^j \qquad (16)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \to u_i^0 = \varphi_i, \;\; u_t(x,0) = \psi(x) \to u_i^1 = u_i^0 + \tau\varphi_i \qquad (17)$$

Тогда уравнение (1) аппроксимируется следующей явной трехслойной схемой, имеющий второй порядок точности по обеим переменным [2]:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} + a^2\frac{2u_{i+4}^{j-1} - 4u_{i+3}^{j-1} + 6u_{i+2}^{j-1} - 4y_{i+1}^{j-1} + u_i^{j-1}}{\tau^2} = 0. \qquad (18)$$

Обозначим $A = a^2 \dfrac{\tau^2}{h^4}$ и перепишем уравнение (18) в виде

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} - A(2u_{i+4}^{j-1} - 4u_{i+3}^{j-1} + 6u_{i+2}^{j-1} - 4y_{i+1}^{j-1} + u_i^{j-1}). \qquad (18)$$

Расчет сеточных уравнений (18) выполнен при помощи метода семиточечной прогонки. Разработанные алгоритмы численно реализованы в среде Mathcad.

Литература:

1. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 2 (39). С. 311-324.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика». М. : Наука, 1987. 286 с.
3. Акимов А.А. О единственности решения задачи типа Неймана для уравнения Чаплыгина / Вестник Московского государственного областного университета. 2013. №4. С. 38.
4. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Решение задачи Дарбу для телеграфного уравнения с отходом от характеристики / Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. №4. С. 29-35.
5. Akimov A., Galiaskarova G. The solution of the Darboux problem for the telegrath equation with deviation from the characteristic / International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. T. 103. № 2. С. 377-383.
6. Akimov A. On uniqueness Morawetz problem for the Chaplygin equation / International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. T. 97. № 3. С. 369-375.