

Фізико-математичні науки

УДК 539.3

**Богатирчук Анатолій Степанович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої  
математики ім. проф. Можара В.І.

Національний університет харчових технологій

**Гузенко Світлана Володимирівна**

асистент кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.

Національний університет харчових технологій

**Богатырчук Анатолий Степанович**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей  
математики им. проф. Можара В.И.

Национальный университет пищевых технологий

**Гузенко Светлана Владимировна**

ассистент кафедры высшей математики им. проф. Можара В.И.

Национальный университет пищевых технологий

**Bogatyrchuk A.**

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor

National University of food technologies

**Guzenko S.**

assistant

National University of food technologies

**ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО**

**ОТВОРУ В ОБОЛОНЦІ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ**

**ОТВЕРСТИЯ В ОБОЛОЧКЕ**

**DETERMINATION OF STRESS CONCENTRATION NEAR THE**

**OPENING IN SHELL**

**Анотація:** Подано розв'язок задачі про розподіл напружень в оболонці із композитного матеріалу з отвором. Використано метод скінченних елементів. Досліджено вплив поперечного зсуву на концентрацію напружень в циліндричній трансверсально-ізотропній оболонці з круговим отвором.

**Ключові слова:** напруження, оболонка з круговим отвором, метод скінченних елементів.

**Аннотация:** Приведено решение задачи о распределении напряжений в оболочке из композитного материала с отверстием. Использован метод конечных элементов. Исследовано влияние межслоевого сдвига на концентрацию напряжений в цилиндрической трансверсально-изотропной оболочке с круговым отверстием.

**Ключевые слова:** напряжение, оболочка с круговым отверстием, метод конечных элементов.

**Summary:** The solution of the problem of stresses distribution in shells made of composite material with opening is given. The finite elements method was used. The influence of transversal shear on the stress concentration in the cylindrical transversely isotropic shell with circular opening was investigated.

**Key words:** stress, shell with circular opening, finite elements method.

**Вступ.** В апаратах харчової промисловості часто використовуються як елементи конструкцій тонкостінні оболонки з отворами. Розглянемо лінійну задачу про напружений стан оболонки із композитного матеріалу товщини  $h$ , послабленої отвором. Оболонка навантажена системою крайових і поверхневих сил. Отвір знаходиться достатньо далеко від країв оболонки. Напружений стан оболонки з концентратором напружень подамо в вигляді суми основного стану, що виникає в оболонці без отвору, та додаткового, що породжується наявністю отвору [1, с.4] . Основний напружений стан оболонки вважається відомим. Для

находження збуреного (додаткового) стану використаємо рівняння пологих оболонок в рамках двохмірної теорії типу Тимошенка .

**Методи досліджень.** Зв'яжемо серединну поверхню оболонки з системою ортогональних координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  з початком в центрі отвору. Введемо також полярні координати  $(r, \theta)$ , зв'язані з центром отвору.

Для розв'язку задачі використаємо метод скінченних елементів. Будемо виходити із варіаційного рівняння Лагранжа

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \varepsilon_{12} + G_1 \delta \chi_1 + G_2 \delta \chi_2 + 2H_{12} \delta \chi_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23}) d\Omega + \\ & + \int \left[ (T_r^0 - p_r) \delta u_r + (S_{r\theta}^0 - p_\theta) \delta u_\theta + (G_r^0 - m_r) \delta \gamma_r + (H_{r\theta}^0 - m_\theta) \delta \gamma_\theta + \right. \\ & \left. + (Q_r^0 - p_\gamma) \delta w \right] d\tilde{A} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Omega$  - область, границя якої достатньо віддалена від контуру отвору;  $\Gamma$  - контур отвору;  $T_1, \dots, Q_2$  - компоненти збуреного напруженого стану;  $T_r^0, \dots, Q_r^0$  - компоненти основного напруженого стану;  $p_r, \dots, p_\gamma$  - система заданих зовнішніх сил і моментів.

Враховуючи, що для більшості випадків на віддалі одного-двох діаметрів отвору від контуру збурення практично зникають [1, с.5], будемо вважати, що границя області  $\Omega$  віддалена не менш, як на два - три діаметри від контуру отвору і має форму круга, центр якого збігається з центром отвору.

Розіб'ємо область  $\Omega$  на квадратичні ізопараметричні елементи. На кожному елементі введемо локальну систему координат  $(\alpha, \beta)$  так, щоб  $|\alpha| \leq 1$  і  $|\beta| \leq 1$ . Координатні функції  $\varphi_i$  вибираємо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{4} (1 + \alpha_0)(1 + \beta_0)(\alpha_0 + \beta_0 - 1) \quad (i=1,3,5,7), \\ \varphi_i &= \frac{1}{2} (1 - \alpha^2)(1 + \beta_0) \quad (i=2,6), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0)(1 - \beta^2) \quad (i=4,8),$$

де  $\alpha_0 = \alpha\alpha_i$ ,  $\beta_0 = \beta\beta_i$ ,  $\alpha_i, \beta_i$  - координати і-го вузла елемента в локальній системі координат.

Зв'язок з глобальною системою координат  $(x, y)$  виконується за допомогою співвідношень

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i, \quad (3)$$

де  $x_i, y_i$  - глобальні координати і-го вузла елемента.

Шукані переміщення для кожного елемента подаються в вигляді інтерполяційних многочленів

$$u_x = \sum_{i=1}^8 u_x^i \varphi_i, \dots, \gamma_y = \sum_{i=1}^8 \gamma_y^i \varphi_i, \quad (4)$$

де  $u_x^i, \dots, \gamma_y^i$  - значення переміщень в і-ому вузлі елемента. Зауважимо, що перехід від глобальних до локальних координат та інтерполювання шуканих функцій виконується за однаковими закономірностями.

Підставляємо шукані переміщення (4) в варіаційне рівняння (1) з урахуванням формул зв'язку похідних в двох системах координат і граничних умов. Надалі виконується числове інтегрування по кожному елементу з використанням квадратичних формул Гауса. Для досягнення необхідної точності достатньо використати формулу з двома вузлами інтегрування по кожній змінній. Після того результати складаємо по всім елементам і вар'юємо по вузловим значенням шуканих величин, вважаючи їх незалежними. Збираючи коефіцієнти при однакових варіаціях, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих. Вона буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{5N} (A_i^n u_x^n + B_i^n u_y^n + C_i^n w^n + D_i^n \gamma_x^n + E_i^n \gamma_y^n) = F_i \quad (5)$$

де  $N$  - число вузлів сітки,  $u_x^n, \dots, \gamma_y^n$  - шукані значення переміщень в  $n$ -ому вузлі області  $\Omega$ . Величини  $A_i^n, \dots, E_i^n$  визначають матрицю жорсткості.

Матриця має стрічкову структуру, ширина якої залежить від способу нумерації вузлів.

Розбивка області  $\Omega$  на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь (5) і її розв'язок виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові C++ [2, с. 71] .

**Результати та обговорення.** Як приклад, розглянуто задачу про визначення концентрації напружень в циліндричній трансверсально-ізотропній оболонці з круговим отвором, навантаженій внутрішнім тиском інтенсивності  $p_0$ . Параметри оболонки:  $R/r_0 = 0,1$ ;  $h/r_0 = 0,1$ .

В таблиці 1 наведені значення коефіцієнтів концентрації кільцевих зусиль  $K_T = T_\theta / p_0 R$  і найбільших по товщині оболонки кільцевих моментів  $K_G = 6G_\theta / p_0 R h$  в деяких точках контура отвору в залежності від зміни параметра  $E/G'$ , що характеризує поперечний зсув матеріалу оболонки.

Таблиця 1.

**Коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль та кільцевих моментів**

$E/G'$	$\theta=0$		$\theta=\frac{\pi}{4}$		$\theta=\frac{\pi}{2}$	
	$K_T$	$K_G$	$K_T$	$K_G$	$K_T$	$K_G$
40	5,478	1,406	3,169	0,828	0,225	3,090
2	5,429	1,613	3,648	0,810	0,108	3,308

(Подана таблиця є розробкою авторів)

Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану в циліндричних оболонках з отворами та складено програму на сучасній мові програмування C++.

### **Висновки.**

1. Розроблена методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан в довільній точці циліндричної оболонки з отвором.

2. Ця методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан в апаратах відповідної форми хімічної, зокрема, харчової промисловості.

### **Література:**

1. Гузь, О.М. Концентрація напружень біля отворів в оболонках із композитних матеріалів / О.М. Гузь, І.С. Чернишенко, К.І. Шнеренко // Прикл.механіка. – 2001. – 37, №2. - С.3-44.

2. Глинський, Я.М. С++ і С++ Builder. /Я.М. Глинський, В.Є. Анохін, В.А. Рязька—Львів, 2003.—192 с.