Секция: Физико-математические науки

САЛИКОВ ВАЛЕНТИН АЛЕКСАНДРОВИЧ

Канд. техн. наук , доцент кафедры АСОИ

Днепропетровский национальный университет

г. Днепропетровск, Украина

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НА КАЧЕСТВО ВЫБОРА МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

При осуществлении выбора по методу трёхуровневой иерархий на её нижнем уровне лицом, принимающим решение (ЛПР), формируется n матриц попарных сравнений альтернатив A_1, A_2, …A_j, …A_n размерности m*m по каждому из n критериев среднего (2-ого) уровня иерархии. На этом уровне ЛПР формирует одну матрицу размерности n*n, отображающую совокупность его предпочтений на множестве из n критериев. Результаты попарных сравнений оцениваются по шкале Вебера так, что образуются матрицы, обладающие свойством симметричности. Процедура иерархического выбора предполагает вычисление собственных векторов $\bar{x}$ и $\overline{x_i}\ (i=\overline{1,n})$ для всех полученных матриц, а также максимальных собственных чисел $\lambda_{\max}$ и $\lambda_i\ (i=\overline{1,n})$ этих матриц. При этом должны соблюдаться соотношения:

$$\overline{A}\overline{x}=\lambda_{\max}\overline{x};\ \overline{A_1}\,\overline{x_1}=\lambda_1\overline{x_1};\ldots\overline{A_i}\,\overline{x_i}=\lambda_i\overline{x_i};\ldots\overline{A_n}\,\overline{x_n}=\lambda_n\overline{x_n} \qquad (1)$$

В случае, если $\lambda_{\max}=$ n и $\lambda_i=m\ (i=\overline{1,n})$, то все матрицы A и A_i абсолютно согласованы по транзитивности предпочтений и можно вычислить вектор глобальных приоритетов $\bar{z}$:

$$\bar{z}=\left[\overline{x_1}^{T},\overline{x_2}^{T}\ldots\ldots\overline{x_n}^{T}\right]\times\left[\overline{x}^{T}\right] \qquad (2)$$

Выполнив операцию $z_{\max}=\max(z_1,z_2,\ldots z_i,\ldots z_n)$ выбирают j-ую альтернативу, наилучшим образом удовлетворяющую ЛПР по совокупности его предпочтений.

Результатам выбора по (2) можно доверять, если все собственные векторы вычислены принципиально точно, например, по методу А.М. Данилевского [2].

Однако, представляет практический интерес возможность использования более простых, но приближенных алгоритмов вычисления собственных векторов матриц. Известны следующие приближенные методы вычисления компонента x_k собственного вектора $\bar{x}$ для матрицы A = $[a_{ki}]$ [1]:

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов равна единице:

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}, \qquad k=1, 2\ldots n \qquad (3)$$

2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму обратных величин:

$$x_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}}, \qquad k=1, 2\ldots n \qquad (4)$$

3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т.е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это процесс усреднения по нормализованным столбцам:

$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}, \qquad k=1, 2\ldots n \qquad (5)$$

4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n-ой степени. Нормализовать полученные числа:

$$x_k = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j-1}^{n} a_{kj}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}}, \qquad k=1, 2,\ldots n \qquad (6)$$

Если исключить влияние на точность определения вектора глобальных приоритетов фактора, обусловленного степенью согласованности матриц A и A_i, то единственным источником погрешностей $\Delta\bar{z} = |\bar{z} - z|$ вычисления вектора $\bar{z}$ станут ошибки вычисления собственных векторов $\bar{x}$ и $\bar{x}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ по формулам (3)-(6).

Очевидно, рассматриваемая задача не может быть решена в общем виде и требуется применить компьютерное моделирование. Особый интерес представляет случай слабо различимых альтернатив, когда $z_j \approx z_{j+1}$.

Для проведения численных расчетов следует решить вопрос о достаточной размерности матриц A и A_i, участвующих в процедуре выбора, и обеспечить абсолютную согласованность. Последнее условие можно выполнить, если на этапе формирования обратно симметричной матрицы A= $[a_{ij}]$ руководствоваться требованием транзитивности предпочтений:

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \qquad (7)$$

т.е. по субъективным соображениям назначать по шкале "1-9" элементы a_{ij} и a_{jk}, но величину a_{ik} определять расчетным путем по (7). Как показано в [1], для такой матрицы $[a_{ij}]$ оценка согласованности ОС=0%.

По соображениям удобства демонстрации полученных данных для численного моделирования выбраны n=6 и m=5. Можно надеяться, что использованные для моделирования матрицы A и A_i ($i = \overline{1,5}$) средней размерности не ограничивает общности полученных результатов.

Результаты численного анализа приведены ниже:

Эксперимент 1. Оценки согласованности: ОС$\approx$40%, ОС$\approx$40% ($i = \overline{1,5}$)

Метод расчета $\bar{x}$	Вектор глобальных приоритетов $\bar{z}$

По формуле (3)	$\bar{z}$ =(0,615; 0,174; 0,175; 0,166; 0,156; 0,165)
По формуле (4)	$\bar{z}$ =(0,159; 0,159; 0,168; 0,179; 0,167; 0,168)
По формуле (5)	$\bar{z}$ =(0,166; 0,171; 0,170; 0,167; 0,159; 0,166)
По формуле (6)	$\bar{z}$ =(0,164; 0,167; 0,170; 0,170; 0,163; 0,167)
По формуле Данилевского	$\bar{z}$ =(0,162; 0,171, 0,177, 0,171; 0,157; 0,162)

Эксперимент 2. Матрицы А и A_i сверх транзитивны (ОС $\approx$ 0%)

Расчеты по формулам (3)-(6) и методу Данилевского	$\bar{z}$ =(0,164; 0,167; 0,170; 0,171; 0,163; 0,167)

Выводы:

1. При осуществлении процедуры выбора на рассогласованных матрицах расчеты по (3)-(6) могут приводить к различным результатам выбора. Особенно это существенно в случае слабо различимых альтернатив, когда $z_j \approx z_{j+1}$

2. Результаты расчетов по (3)-(6) и методу Данилевского практически совпадают в случае использования сверх транзитивных матриц А и A_i . Это означает, что даже самый простой способ вычисления по (3) обеспечивает достоверный выбор.

Литература:

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993.

2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1996