

Педагогические науки

УДК 378.1

Ткач Дмитро Іванович,
Кандидат технічних наук, доцент,
завідуючий кафедрою нарисної геометрії та графіки
Придніпровської державної академії будівництва та архітектури
Україна, Дніпропетровськ

Ткач Дмитрий Иванович,
Кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой начертательной геометрии и графики
Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры
Украина, Днепропетровск

Tkach Dmitry Ivanovich,
Ph.D, Associate professor, Head of the Department of descriptive geometry and
graphics SHEE “Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and
Architecture”.
Ukraine, Dnepropetrovsk

**ДИДАКТИЧНИЙ ЗМІСТ ПРИНЦИПУ ПРОЕКЦІЮВАННЯ ЯК
КОНЦЕПТУАЛЬНА ОСНОВА ПРОЦЕСУ НАВЧЕННЯ
МАЙБУТНІХ АРХІТЕКТОРІВ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

**ДИДАКТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРИНЦИПА
ПРОЕКЦИРОВАНИЯ КАК КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ ОСНОВЫ
ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ БУДУЩИХ АРХИТЕКТОРОВ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**DIDACTIC CONTENT OF THE PRINCIPLE OF PROJECTION AS A
CONCEPTUAL FRAMEWORK FOR THE PROCESS OF TRAINING
FUTURE ARCHITECTS OF DESCRIPTIVE GEOMETRY**

Анотація. Робота присвячується розкриттю дидактичного змісту принципу проєкціювання для змістовного викладання нарисної геометрії майбутнім архітекторам як провідної теоретичної основи створення

раціональних геометрографічних технологій одержання різних видів оборотних проєкційних зображень, а також їх взаємних перетворень.

Ключові слова: апарати проєціювання, оборотність, колінеарні відповідності, гомології, система, структура,

Дидактическое содержание принципа проецирования как концептуальной основы процесса обучения будущих архитекторов начертательной геометрии.

Аннотация. Работа посвящается раскрытию дидактического содержания принципа проецирования для содержательного преподавания начертательной геометрии будущим архитекторам как ведущей теоретической основы создания рациональных геометрографических технологий получения различных видов обратимых проекционных изображений, а также их взаимных преобразований.

Ключевые слова: аппараты проецирования, обратимость, гомологии, коллинеарные соответствия, система, структура.

Abstract. The work is dedicated to the principle of disclosure of didactic content projection for meaningful teaching descriptive geometry future architects as the leading theoretical basis for the creation of rational geometric-graphic technologies for the production of various types of reversible projection images, as well as their mutual transformations.

Key words: aids projection, reversibility, homology, collinear matching, system, structure.

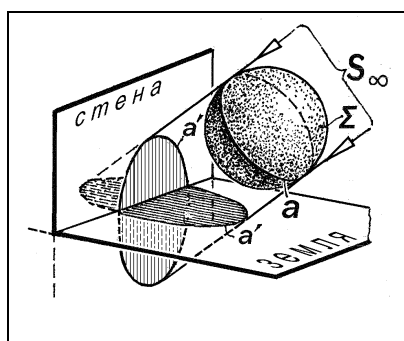


Рис.1. Падаюча тінь сфери як її паралельна проєкція

Якщо на рівні емоційного сприйняття розглядати в ясну сонячну погоду тінь, яка падає від знайомого об'єкта на землю або на мур, то можна прийняти її за його *зображення*. А якщо після того перейти на рівень абстрактного осмислення побаченого, то можна зрозуміти природу падаючої тіні як *проєкцію* освітленого об'єкта на площину мур або землі (рис.1). При цьому паралельні сонячні промені стають *проєкціуючими прямими*, нескінченно-віддалене Сонце – центром проєкціювання, а одержані при цьому проєкції є *паралельними*.

Якщо за джерело проєкціуючих променів прийняти електролампку у світильнику з конічним абажуром, то фігури освітлених ділянок стола і стіни будуть центральними проєкціями на них відповідно нижнього і верхнього круглих отворів абажура (рис.2).

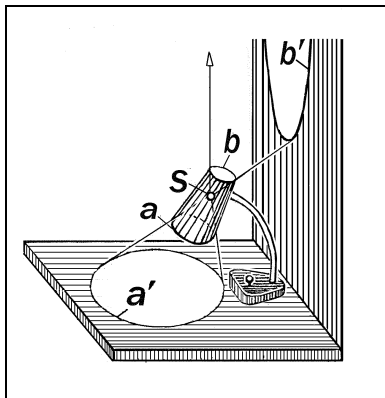


Рис.2. Приклад центральних проєкцій кіл

принцип проєкціювання, який лежить в основі концептуального конструювання різних варіантів деякого «технологічного устаткування» по виробництву різних проєкційних зображень з наперед завданими властивостями. Це конструювання є концептуальним тому, що воно здійснюється в думках, на основі відповідних ідей чи концепцій, які продиктовані вимогами до якості зображень, що одержуються.

По такому ж принципу одержується фотозображення, коли оптичний центр об'єктиву грає роль центра проєкціювання, а площина плівки, - роль площини проєкцій (картини). В цих випадках проєкції об'єкта на одну площину з центра на кінцевої відстані від картини мають назву *центральних*.

Проєкційна природа падаючих тіней і фотозображень стала підставою віднести її в принцип проєкціювання, який лежить в основі концептуального конструювання різних варіантів деякого «технологічного устаткування» по виробництву різних проєкційних зображень з наперед завданими властивостями. Це конструювання є концептуальним тому, що воно здійснюється в думках, на основі відповідних ідей чи концепцій, які продиктовані вимогами до якості зображень, що одержуються.

Найбільш простим з цього «устаткування» є апарат центрального проєкціювання як геометрична модель фотографічної камери-обскури (рис. 3).

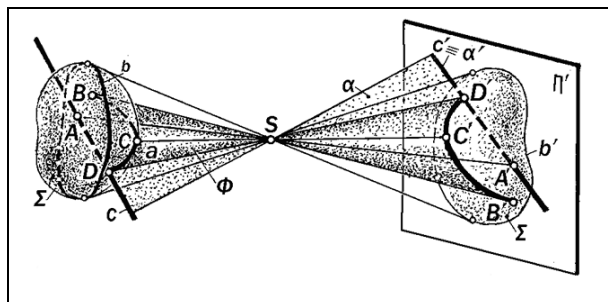


Рис.3. Апарат центрального проєкціювання

Він складається з центра S і картини Π' , віддалених одне від одного на визначену кінцеву відстань, яка зветься *главною*.

Для одержання цим апаратом зображення будь-якого об'єкта Σ

останній попередньо підлягає, як просторова система, структурному аналізу, в результаті якого з'ясовуються його взаємопов'язані структурні елементи (точки, лінії), які підлягають зображенню.

Конструктивною сутністю процесу проєкціювання є мислена процедура, яка передбачає попередню заміну об'єкту зв'язкою променів, площин і поверхонь, проєкціюючих його точки, прямі і криві лінії і її перетину площиною картини, фігурою якого буде шукане зображення. Така процедура є практично доцільною тому, що легко формалізуємо графічне. А насправді сутність принципу проєкціювання для одержання зображень зводиться не до розв'язання позиційної задачі на перетин зв'язки променів площиною картини, а до встановлення певних відповідностей між однорідними елементами об'єкта і картини, які володіють властивістю взаємної однозначності.

Найбільш наочно сутність цих відповідностей розглядається на прикладі їх встановлення ексклюзивним апаратом центрального рухомого проєкціювання [1] (рис.4).

Якщо уявити, що центр S переміщується по перпендикуляру до нерухомої картини Π' і проєкціює на неї нерухому точку A , то очевидно, що рух центру по перпендикуляру до картини викликає рух проєкції A' точки A по прямій a' як по картинному сліду проєкціуючої площини, яка завдається траєкторією s руху центра S і точкою A .

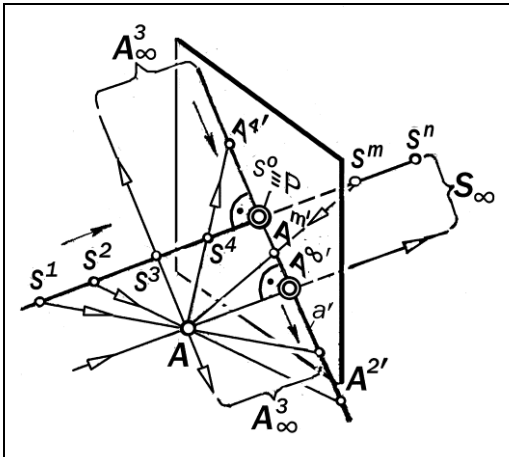


Рис.4. Апарат рухомого центрального проєкціювання і положень проєкції A' на a' також ∞^1 , то одержуємо, що процес проєкціювання точки A конструктивно встановлює таку відповідність між ними, при якому кожному положенню центра S на s відповідає єдине положення проєкції A' на a' і навпаки, кожному положенню проєкції A' на a' відповідає єдине положення S на s . Така відповідність між однорідними елементами двох систем називається *взаємно-однозначною*.

Це означає, що відповідні таким чином системи як множини елементів, рівно потужні, а їх структури ізоморфні.

Відмінною особливістю такої відповідності є те, що нескінченно-віддаленому або невласному положенню S_∞ центра S відповідає власна проєкція A'_∞ точки A , і навпаки, власному положенню S^3 центра S відповідає невласна проєкція A^3_∞ . Відповідність невласних елементів власним робить їх *рівноправними*. У зв'язку з цим виникає поняття *проективної прямої*, до колінійних точок якої додається одна невласна.

Проективні прямі a' і s' замкнені у своїх невласних точках.

Можно казати, що центральне рухоме проєкціювання, крім вищерозглянутої відповідності, співпоставляє точці A , що зображується, прямою a' картини Π' , а трипараметричній множині точок евклідового простору R , -однопараметричну множину прямих типа a' , які створюють пучок з

центром в точці $P = s \times P'$. На кожній прямій цього пучка є одна невласна точка, а множина цих точок всіх прямих пучка P розташовується на одній невласній прямій площини P' . Площина, до якої приєднана невласна пряма як система колінійних невластных точок всіх її власних прямих, має назву *проективної*.

Подібно площині P' кожна площина простору має свою невласну пряму, а сукупність всіх невластных точок власних прямих і невластных прямих власних площин евклідового простору створює його єдину *невласну площину*. Евклідів простір, який має одну невласну площину як систему компланарних точок і прямих, називається *розширеним евклідовим* або *проективним*, яке створюється відповідностями, що породжуються центральним проєкціюванням.

Тому що у проективному просторі власні і невласні елементи рівноправні, то між ними справедливі наступні зв'язки та відношення:

- дві нетотожні точки завжди колінійні, тобто, завдають одну пряму;
- три неколінійні точки завжди компланарні, тобто, задають одну площину;
- дві компланарні, але нетотожні прямі завжди конкурентні (або інцидентні власній або невлаській точці);
- пряма і неінцидентна їй площина завжди конкурентні (або інцидентні власній або невлаській точці);
- дві нетотожні площини завжди конкурентні (або інцидентні власній або невлаській прямій);
- три власні площини, неінцидентні одній прямій, завжди інцидентні власній точці.

Зоровий апарат людини заснований на принципі центрального проєкціювання, який формує візуальний простір зорового сприйняття по законах організації проективного простору, який також формується центральним проєкціюванням.

Небосхил і лінія горизонту – це зрима невласна площина і одна з невластных прямих цього простору. Потому проективний простір є концептуальною моделлю візуального простору свідомості людини.

Геометрія проективного простору називається *проективною*. Вона вивчає ті властивості його об'єктів, які зберігаються при їх центральному проєкціюванні. Потому проективна геометрія є теоретичною основою геометрії картинного простору лінійної перспективи.

А простір, в якому невласні елементи вважаються неіснуючими, називається *афінним*.

Геометрія афінного простору називається *афінною*. Вона вивчає ті властивості його об'єктів, які зберігаються при їх паралельному проєкціюванні. Потому афінна геометрія є теоретичною основою геометрії картинних просторів ортогональних і паралельних аксонометричних проєкцій.

Якщо спроекціювати з центру S точкове поле площини Π на поле площини Π' , то між точками і відрізками прямих цих полів встановляться такі взаємно-однозначні відповідності:

- точці A поля Π відповідає точка A' поля Π' і навпаки;
- відрізка BC поля Π відповідає відрізок $B'C'$ поля Π' і навпаки;
- колінійним точкам B, D, C поля Π відповідають колінійні точки B', D', C' поля Π' і навпаки;
- точці M поля Π , яка лежить на лінії s_0 перетину Π і Π' , відповідає точка M' поля Π' , яка з нею співпадає;

Лінія s_0 , яка складається з подвійних точок, є подвійною прямою і називається *віссю відповідності* [2].

Взаємно-однозначна відповідність елементів двох плоских полів, яка встановлена проєкціюванням, при якому точкам і прямим одного поля відповідають точки і прямі другого поля і колінійність відповідних точок зберігається, називається *колінеарним* або *колінеацією*.

Якщо колінеація встановлюється центральним проєкціюванням, то вона називається *перспективною*, а якщо паралельним, то – *перспективно-афінною* або *спорідненою*.

Встановлюючи ту чи іншу колінеацію, проєкціювання поля Π на поле Π' перетворює поле Π в поле Π' по законах цієї колінеації.

Конструктивні особливості процесів проєкційних перетворень елементів двох конкурентних площин Π і Π' описав Жерер Дезарг у своїй славнозвісної теоремі про два відповідних трикутника:

Теорема Дезарга. *Якщо відповідні вершини двох трикутників лежать на прямих, які перетинаються в одній точці, то відповідні сторони цих трикутників перетинаються в точках, які лежать на одній прямій.*

Ця теорема витікає з властивостей колінеарних відповідностей і примітна тим, що справедлива як для конкурентних (рис.5,7), так і для компланарних трикутників (рис.6,8).

Її справедливність не залежить від того, власна або невласна точка

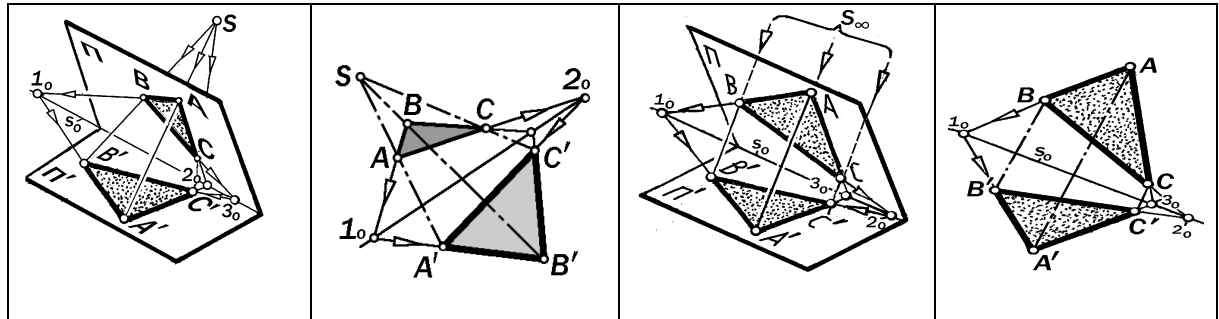


Рис.5.Перспективна колінеація

Рис.6. Гомологія

Рис.7.Перспективно-афінна колінеація

Рис.8. Споріднена відповідність

перетину прямих, які з'єднують вершини цих трикутників, рівно також і від того, власна або невласна лінія перетину площин цих трикутників.

Якщо теорема Дезарга справедлива для двох відповідних трикутників, то вона справедлива для двох будь-яких плоских фігур.

Якщо два колінеарних точкових поля обертанням навколо вісі відповідності s_0 з конкурентного положення перевести в компланарне, то їх просторова колінеація перейде (перетвориться) у колінеацію двох суміщених плоских полів, яка називається *гомологією*, а відповідні в

гомології фігури називаються *гомологічними*. При цьому центр відповідності називається центром гомології, а вісь відповідності – віссю гомології.

При невласному центрі вісь гомології називається віссю спорідненості, а гомологічні в цьому випадку фігури, – *спорідненими*.

Гомологія як взаємно-однозначна відповідність між елементами одної й той же площини, є таким перетворенням цієї площини в себе, при якому кожна її точка перетворюється в точку, колінійні точки перетворюються в колінійні точки, кожна пряма – в пряму, а точки на вісі гомології перетворюються в себе.

Гомологія завдається центром, віссю і парою гомологічних точок або прямих, трьома парами гомологічних неколінійних точок або центром і двома парами гомологічних конкурентних прямих.

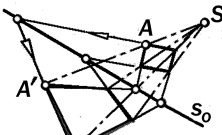
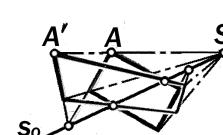
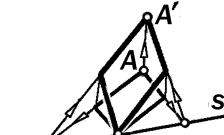
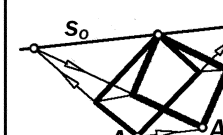
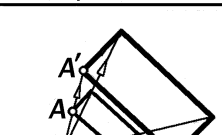
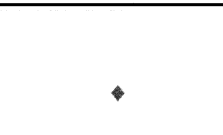
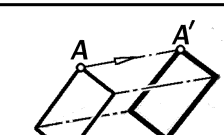
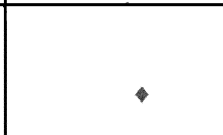
Центр S Ось s ₀	Собственный S		Несобственный S _∞	
	S ∉ s ₀	S ∈ s ₀	S _∞ ∉ s ₀	S _∞ ∈ s ₀
Собственная	 Перспектива	 Э л а ц и я	 Р а с т я ж е н и е - с ж а т и е	 С д в и г
Несобственная	 Г о м о т е т и я , п о д о б и е		 П а р а л л е л ь н ы й п е р е н о с	

Рис.9. Види гомологій

Тому що центр і вісь можуть бути власними або невласними, а між собою розташовуватися по різному, можливі різні види гомологій (рис.9).

Якщо гомологія зберігає паралельність відповідних прямих, то гомологічні фігури називаються афінними або спорідненими. Апарати таких гомологій обов'язково містять невласні елементи: або вісь, або центр, або і те і друге. До таких гомологій відносяться перетворення розтягнення (тиску), гомотетії (подібності), зсуву і паралельного переносу.

Якщо дві гомологічні фігури конгруентні, тобто, можуть прийти в тотожне розташування обертанням навколо центра S , то вони називаються *центрально-симетричними* (рис.10), а якщо обертанням навколо вісі, то *вісесиметричними* (рис.11), а дві фігури по обидва боки площини, точки

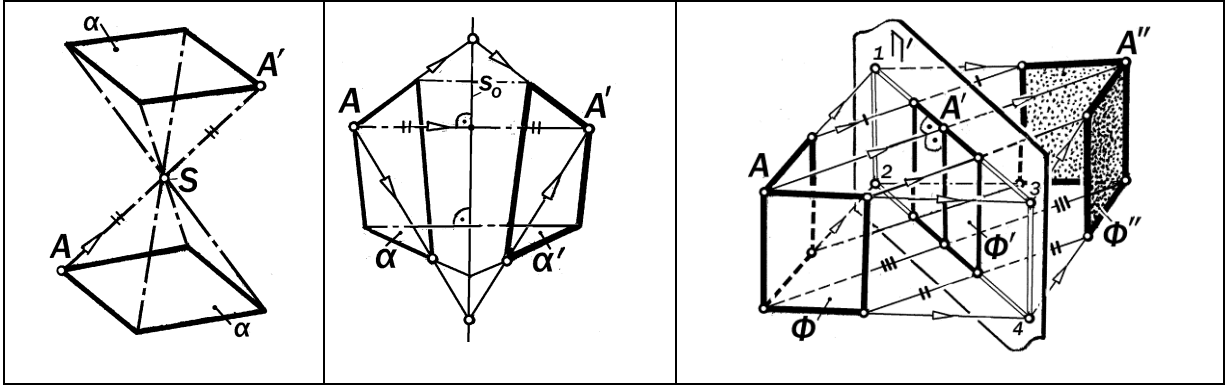


Рис.10.Центрально-симетричні фігури

Рис.11. Вісесиметричні фігури

Рис.12. Дзеркально-симетричні фігури

яких рівновіддалені від неї, називаються дзеркально-симетричними (рис.12).

Проекціювання однієї плоскої фігури породжує на картині одну гомологію. Але, як правило, об'єкт, що зображується, є системою декількох конкурентних плоских фігур і його проекціювання з одного центра породжує на картині систему взаємопов'язаних площинних гомологій. Якщо, при проекціюванні об'єкту Φ з центра S на Π' співвіднести його точці A не точку A' картини, а деяку точку A'' проекціуючого променя SA , то здійсниться просторове гомологічне перетворення об'єкта Φ у об'єкт Φ'' , в якому площина картини явиться подвійною площиною гомології.

Одержаний об'єкт Φ'' є перспективним рельєфом об'єкту Φ , тому як він, займаючи проміжне положення між Φ і Φ' , є тривимірним як Φ і

перспективним як Φ' (рис.13).

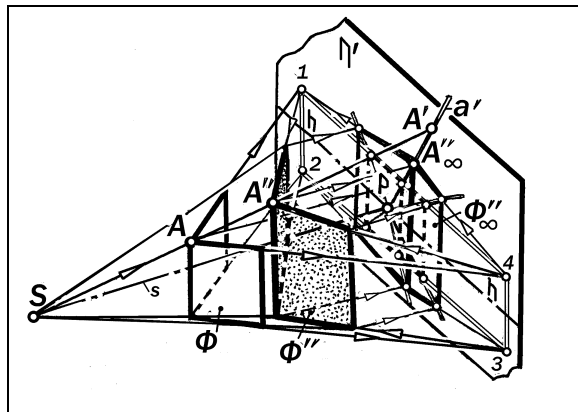


Рис.13. Просторово-гомологічні фігури (перспективний рельєф)

Якщо розглядати сукупність об'єктів Φ і Φ'' , взаємопов'язаних проєкціуючими променями і конфігурацією картинних слідів, як систему, то вона опиниться тією зв'язною фігурою, ортогональна проєкція якої на картину є оборотним комплексним комбінованим зображенням, яке запропонував проф. І.І.Котов [3].

Центральна або радіально-променева, вісьова і дзеркальна симетрія є фундаментальним фактором структури - і формоутворення як відповідних об'єктів-систем живої і неживої природи, так і переважної більшості штучних и, в першу чергу, архітектурних і дизайнерських об'єктів.

Всі види гомологій, які породжуються колінеаціями, які встановлюються різними варіантами конструкції апарата проєкціювання, зв'язують відповідні в них плоскі фігури в їх системи різними відношеннями перспективної і афінної гомологічності, які доповнюють раніш розглянуті зв'язки та відношення до повного набору засобів геометрографічного моделювання архітектурних і дизайнерських об'єктів як систем, що проєктуються.

Вимога оборотності проєкційного зображення сформувала концепцію методу двох зображень, який лежить в основі одержання проєкційних креслень, структура яких ізоморфна структурі об'єктів, що зображуються.

В загальному випадку апарат цього методу складається з трьох площин - P' , P_1 і P_2 і спряжених з ними трьох колінійних центрів S , S^1 і S^2 . Площина P' називається головною площиною проєкцій або картиною, а площини P_1 і P_2 - допоміжними (рис. 14, п.1).

Для одержання оборотного креслення точки A її проєкціюють спочатку

з центру S^1 на Π_1 і одержують першу первинну проекцію A_1 , потім – з центру S^2 на Π_2 і одержують другу первинну проекцію A_2 , а після цього

Название проекций		Геометрическая структура аппарата проецирования	Определитель изображения
ЦЕНТРАЛЬНЫЕ	Общего вида	1	
	Базис	$\Pi_1 \times \Pi_2, S, S^1, S^2$	
	Центральная аксонометрия	2	
	Базис	$\Pi', \Pi_1 \equiv xOy, \Pi_2 \equiv xOz, S_0^z (s \perp \Pi_1), S_2 \equiv S$	
	Перспектива на наклонной картине	3	
	Базис	$\Pi_1, \Pi_2, \Pi', S_0^z (s^1 \perp \Pi), S^2 \equiv S$	
Параллельные	Общего вида	7	
	Базис	$\Pi', \Pi_1 \times \Pi_2, S^1, S^2, S, S_\infty$	
	Параллельная аксонометрия	8	
	Базис	$\Pi', \Pi_1 \equiv xOy, \Pi_2 \equiv xOz, S_\infty^z (s^1 \perp \Pi_1), S_\infty^2 \equiv S_\infty$	
Ортогональные	Общего вида	9	
	Базис	$\Pi \equiv \Pi_1, \Pi_2 \perp \Pi_1, S_\infty^z (s_\infty \perp \Pi_1), S_\infty^2 (s^2 \perp \Pi_2), S_\infty (s \perp \delta)$	
	С числовыми отметками	10	
Базис	$\Pi' \equiv \Pi_1 \equiv \Pi_0, S_\infty (s \perp \Pi_0) \equiv S_\infty^z (s \perp \Pi_0)$		
Центрально-подвижные	В неизменяемой системе S-П'	5	
	Базис	$\Pi_1 \equiv \Pi_2 \equiv \dots \equiv \Pi', s \perp \Pi', 0 \leq SP \leq \infty$	
	В изменяемой системе S-П'	6	
Базис	$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi', S^1, S^2, S_\infty, SP - const$		
Перспективно-ортогональные сопряженные (ПОС-проекции)	Общего вида	11	
	Базис	$\Pi' \equiv \Pi_2, S, S_\infty, (s \perp \Pi_2)$	
Комплексные комбинированные изображения	Общего вида	12	
	Базис	$\Pi' \equiv \Pi_2, S^1 P \perp \Pi, (S^1 \rightarrow S^2), S_\infty, P \perp \Pi_2$	

Рис. 14. Варіанти геометричної структури апарата методу двох зображень одержані первинні проекції A_1 і A_2 з центра S проєкціюють на Π' і одержують пару колінійних вторинних проекцій A_1' і A_2' . Пряма, на якій лежать ці проекції, називається лінією зв'язку. Вона проходить через картинний слід S_0 лінії центрів, який називається центром відповідності вторинних проекцій A_1 і A_2 .

Система двох взаємопов'язаних вторинних проекцій об'єкта називається його двокартинним комплексним рисунком. Площини Π_1, Π_2 і Π' і центри S^1, S^2 і S , що з ними спряжені складають фіксований базис апарата

апарата метода двох зображень або його структуру [4]. Різні варіанти конструкцій фіксованого базису визначають різні види проєкцій, що укладають двокартинні комплексні рисунки (рис.14, п.п. 2 -12). Але в силу того, що кожний апарат проєкціювання має свої конструктивні особливості, що впливають на характер властивостей проєкцій, які ними одержуються, виходе, що одна і та ж інформація кодується в різних проєкціях різними зображальними властивостями, які описуються відповідно різними аксіоматичними твердженнями і визначеннями.

Звідси випливає, що системна нарисна геометрія в якості своїх підсистем має геометрії картинних просторів ортогональних, паралельних аксонометричних і центральних проєкцій, а також проєкцій з числовими позначками тощо. Кожна з цих геометрій має свою аксіоматику, що описує морфологічне, технологічне та геометрографічне спрямування їх змісту.

Фундаментальність цим геометріям надає зміст їх технологічних напрямів, які насамперед розглядають структури геометричних апаратів одержання і взаємного перетворення оборотних зображень, а потім - їх графічних моделей.

Мінімізація структури останніх приводить до фундаментального поняття *визначника зображення*, вперше запропонованого професором Рускевичем Н.Л. [4] як незмінної графічної конструкції, яка приєднана до картинної площини і створює в ній всі умови для безпосередньої і незалежної побудови і перетворення оборотних зображень, тобто, надає картині властивості самостійного простору. Якщо в цьому просторі відбуваються такі перетворення його елементів, при яких кожне наступне є результатом добутку двох попередніх, то у своїй сукупності вони утворюють відповідну групу перетворень. У згоді з клейновою класифікацією геометричних систем, основним предметом дослідження геометрії того чи іншого простору є інваріанти відповідних

груп перетворень їх елементів. У нашому випадку картинний простір заповнений оборотними зображеннями і тому роль інваріантів груп їх взаємних перетворень грають відповідні графічні конструкції у вигляді визначників цих зображень. Як показали дослідження [5], ці конструкції проєктивно еквівалентні бінарним моделям простору R_3 [6] професора Джапарідзе І.С., отриманим в результаті «раціонального» відображення, що переводить проєктивні відповідності в аналогічні плоскі, завдяки чому «операції на рисунку доводяться до мінімуму» [7].

Висновок: Принцип проєкціювання, володіючий природовідповідністю і концептуальністю, є науковою основою загальної теорії оборотних зображень і творче розуміння його універсальності студентами-архітекторами дозволяє їм відпрацьовувати у своїй свідомості спроможність до раціонального розв'язання будь-яких проектних задач.

Використана література

1. Ткач Д.И. Центральное подвижное проецирование/Д.И.Ткач//Прикладная геометрия и инженерная графика, выпуск VIII,- К.: Будивельник, 1969. С. 116-120.
2. Делоне Б.Н. Аналитическая геометрия. / Б.Н.Делоне, Д.А.Райков -М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 436 с.
3. Котов И.И. Комбинированные изображения (исследования по основаниям начертательной геометрии).-М.: МАИ, 1951. – 134 с.
4. Русскевич Н.Л. Начертательная геометрия / Н.Л.Русскевич. - К.: Высшая школа, 1978. – 308 с.
5. Ткач Д.И. Некоторые вопросы исследования центральных проекций и моделирования пространства аппаратом центрального подвижного проецирования применительно к построению архитектурных перспектив. /Д.И.Ткач// Автореферат канд. диссертации по специальности 05.01.01.– Днепропетровск, 1969.- 34 с.

6. Джапаридзе И.С. Конструктивные отображения проективных преобразований пространства / И.С.Джапаридзе. - Тбилиси: изд. ГПИ, 1964. –187с.
7. Ткач Д.І. 12 раціональних геометрографічних технологій взаємних перетворень оборотних зображень. /Д.І.Ткач // Сучасні проблеми геометричного моделювання.- Мелітополь, 2004. – С. 37- 42.

References:

1. Tkach D.I. Central'noe podvizhnoe proecirovanie/D.I.Tkach//Prikladnaja geometrija i inzhenernaja grafika, vypusk VIII,- K.: Budivjel'nyk, 1969. S. 116-120.
2. Delone B.N. Analiticheskaja geometrija. / B.N.Delone, D.A.Rajkov -M.-L.: Gostehizdat, 1949. – 436 s.
3. Kotov I.I. Kombinirovannye izobrazhenija (issledovanija po osnovam nachertatel'noj geometrii).-M.: MAI, 1951. – 134 s.
4. Russkevich N.L. Nachertatel'naja geometrija / N.L.Russkevich. - K.: Vysshaja shkola, 1978. – 308 s.
5. Tkach D.I. Nekotorye voprosy issledovanija central'nyh proekcij i modelirovanija prostranstva apparatom central'nogo podvizhnogo proecirovanija primenitel'no k postroeniju arhitekturnyh perspektiv. /D.I.Tkach// Avtoreferat kand. dissertacii po special'nosti 05.01.01.– Dnepropetrovsk, 1969.- 34 s.
6. Dzhaparidze I.S. Konstruktivnye otobrazhenija proektivnyh preobrazovanij prostranstva / I.S.Dzhaparidze. - Tbilisi: izd. GPI, 1964. –187s.
7. Tkach D.I. 12 racional'nih geometrografichnih tehnologij vzacmnih peretvoren' oborotnih zobrazhen'. /D.I.Tkach // Suchasni problemi geometrichnogo modeljuvannja.- Melitopol', 2004. – S. 37- 42.