Економіка

УДК 330.4: 504.06

**Онищенко Андрій Михайлович**
*доктор економічних наук, професор,*
*професор кафедри інформаційних систем та технологій*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
**Onyshchenko Andrii**
*Doctor of Economic Sciences, Professor*
*Department of Information Systems and Technologies*
*Taras Shevchenko National University of Kyiv*
*ORCID: 0000-0003-3975-8946*

**Остапенко Олександр Петрович**
*кандидат економічних наук,*
*начальник кафедри фінансового забезпечення військ*
*Військовий інститут*
*Київського національного університету*
*імені Тараса Шевченка*
**Ostapenko Oleksandr**
*Candidate of Economic Sciences, Head of the*
*Department of Financial Support for the Troops*
*Military Institute of Taras Shevchenko National University of Kyiv*
*ORCID: 0000-0003-3194-0372*

# МОДЕЛЮВАННЯ МАТЕРІАЛЬНО-ВАРТІСНОЇ СТРУКТУРИ ЕКОЛОГІЧНО ЗБАЛАНСОВАНОЇ ГАЛУЗЕВОЇ СТРУКТУРИ ЕКОНОМІКИ

# MODELING THE COST-MATERIAL VALUE STRUCTURE OF AN ENVIRONMENTALLY BALANCED SECTORAL STRUCTURE OF THE ECONOMY

***Анотація.*** *Вступ. Економіки низки країн, що зазнають економічних трансформацій, потребують особливої уваги в питаннях ціноутворення та оплати продуктів екологічного сектора. Це складний комплекс проблем, який справляє принциповий вплив на макроекономіку, особливо стосовно рівня інфляції. У цьому аспекті інвестиційні еколого-економічні проекти залежать від адекватної побудови цінового простору. В таких умовах важливим аспектом економіки у сфері пом'якшення наслідків зміни клімату та адаптації до них є визначення економічної цінності кліматичних умов як природних ресурсів, природних послуг та їх адекватної ціни. Правильне врахування ціни ресурсів дозволить більш обґрунтовано визначити економічну ефективність альтернатив соціально-економічного та технологічного розвитку, кліматичної політики та її інструментів. Наприклад, розвивати енергетику, яка базується на вугіллі та пов'язана зі збільшенням викидів парникових газів або форсувати енергозбереження, одним з наслідків якого є зменшення впливу на глобальний клімат.*

*Обґрунтування збалансованих темпів та пропорцій соціально-економічного розвитку в процесі аналізу економічної системи суттєво пов'язано з аналітичним дослідженням інформації, що відображає кількісні взаємозв'язки між галузями. При цьому важливо, щоб аналіз був міжгалузевим, який поєднує всі цілі розвитку економічної системи. Міжгалузеві системи в такому розумінні слугують засобами для здійснення такого дослідження.*

*Мета. Будучи об'єктом аналізу, міжгалузева інформація описує галузі економіки з погляду їх взаємозв'язку в єдиному економічному комплексі. Але таке уявлення про міжгалузеву інформацію досить невизначене. Якщо розглядати галузі як відокремлені підсистеми економіки з притаманними їм господарськими, технологічними, матеріально-речовими та вартісними структурами виробництва, то виникає питання: чи всі взаємозв'язки галузей є об'єктом міжгалузевого аналізу і якщо ні, то*

*чим зумовлено звуження цієї множини? Для відповіді на це питання недостатньо вивчення лише структури виробництва або міжгалузевих зв'язків. Необхідно також знати цілі аналізу.*

*Вплив цілей аналізу на структуру міжгалузевої інформації здійснюється переважно через наявні засоби аналітичних досліджень. Структура інформаційних масивів повинна бути узгодженою з вимогами, обумовленими процедурами їх перетворення. Цілі міжгалузевого балансу, будучи сформульованими, певною мірою визначають і відповідні засоби. Слід, однак, враховувати динаміку взаємодії цілей та засобів. Вона полягає в тому, що певний рівень розвитку засобів дозволяє досягти відповідних цілей. Ускладнення цілей висуває нові вимоги до засобів та слугує джерелом їх розвитку.*

*Таким чином, постає необхідність реалізації системного, комплексного аналізу взаємозв'язку між галузями економічної системи на базі дослідження багатоцільових аспектів економічного розвитку. Економічний результат від керуючих впливів у системі моделей визначається через розв'язання задач розвитку тих підсистем, на які прямо або опосередковано спрямовані ці впливи, що потребує додатково враховувати фактор динамічних змін основних економічних показників.*

*Матеріали і методи. Інформаційну базу дослідження складають аналітичні матеріали Верховної Ради України, Кабінету Міністрів України, Міністерства охорони навколишнього природного середовища України, Державного комітету статистики України науково-дослідних установ та вузі; монографічні дослідження та статті вітчизняних і зарубіжних авторів, матеріали науково-практичних конференцій, збірники, дані річних звітів, інформаційних та аналітичних бюлетенів, тижневиків, наукові дослідження та публікації розміщені в мережі Internet, методичні та аналітичні матеріали й документи міжнародних організацій ООН, міжурядових організацій ЮНЕП, ЮНЕСКО, ОЕСР, а*

*також законодавчі та нормативні акти з питань політики охорони навколишнього природного середовища України та інших держав.*

*Методологічною основою статті є системний підхід до аналізу еколого-економічної взаємодії, розвинутий у працях вітчизняних та зарубіжних вчених. При дослідженні галузевої структури економіки – метод „витрати-випуск", магістральну теорію балансових моделей, елементи теорії агрегування. Зважаючи на економічний характер дослідження, застосовано елементи економічної теорії, мікро-, макроекономіки, міжнародної економіки. Екологічна складова покликала необхідність застосування знань з основ екології, концепції сталого розвитку, охорони довкілля та природокористування.*

*Результати. У статті досліджено методологічні засади моделювання матеріально-вартісної структури екологічно збалансованої галузевої структури економіки в умовах сталого розвитку. Обґрунтовано доцільність використання динамічних міжгалузевих еколого-економічних моделей типу «витрати–випуск» для аналізу взаємозв'язків між галузями виробництва та природоохоронної діяльності. Розглянуто пряму та двоїсту динамічні моделі Леонтьєва–Форда, що відображають узгодженість матеріально-речової та вартісної структури валового продукту з урахуванням процесів забруднення довкілля та його очищення. Проведено аналіз траєкторій розвитку рівноважних цін і валових випусків за різних припущень щодо динаміки доданої вартості. Показано, що зростаючим траєкторіям прямої моделі відповідають спадні траєкторії двоїстої моделі, що обґрунтовує новий напрям досліджень — динамічну теорію двоїстості в еколого-економічних системах.*

*Перспективи. Отримані результати можуть бути використані при формуванні економічної та кліматичної політики, а також у процесі прогнозування структурних змін економіки.*

***Ключові слова:*** *еколого-економічне моделювання, міжгалузевий баланс, динамічна модель Леонтьєва–Форда, екологічно збалансована економіка, ціноутворення, сталий розвиток, матеріально-вартісна структура.*

***Summary.*** *Introduction. The economies of a number of countries undergoing economic transformation require special attention to issues of pricing and payment for products of the environmental sector. This is a complex set of problems that has a fundamental impact on the macroeconomy, particularly with regard to inflation levels. In this context, investment-based environmental and economic projects depend on the adequate formation of the pricing space. Under such conditions, an important aspect of the economy in the field of climate change mitigation and adaptation is the determination of the economic value of climatic conditions as natural resources and ecosystem services, as well as the establishment of their adequate prices. Proper consideration of resource pricing makes it possible to more reasonably assess the economic efficiency of alternative socio-economic and technological development paths, climate policy, and its instruments. For example, a choice arises between developing coal-based energy production associated with increased greenhouse gas emissions and intensifying energy conservation, one of the consequences of which is a reduced impact on the global climate.*

*The justification of balanced rates and proportions of socio-economic development in the process of analyzing the economic system is closely linked to the analytical study of information that reflects quantitative interrelations among economic sectors. At the same time, it is essential that the analysis be intersectoral, integrating all development objectives of the economic system. Intersectoral systems, in this sense, serve as tools for conducting such an analysis.*

*Purpose. As an object of analysis, intersectoral information describes economic sectors in terms of their interconnections within a unified economic complex. However, this understanding of intersectoral information is rather vague. If sectors are considered as distinct subsystems of the economy with their inherent economic, technological, material-physical, and value production structures, the question arises as to whether all interrelations among sectors constitute the object of intersectoral analysis, and if not, what determines the narrowing of this set. To answer this question, it is insufficient to study only the production structure or intersectoral linkages; it is also necessary to understand the objectives of the analysis.*

*The influence of analytical objectives on the structure of intersectoral information is exercised primarily through the available analytical tools. The structure of information arrays must be consistent with the requirements imposed by the procedures of their transformation. Once formulated, the objectives of the input–output balance to some extent also determine the corresponding analytical tools. However, the dynamic interaction between objectives and tools should be taken into account. This dynamic consists in the fact that a certain level of development of analytical tools makes it possible to achieve corresponding objectives, while the increasing complexity of objectives generates new requirements for tools and serves as a source of their further development.*

*Thus, there arises the necessity to implement a systemic and comprehensive analysis of intersectoral interrelations within the economic system based on the study of multi-objective aspects of economic development. The economic outcome of control actions within a system of models is determined through solving development problems of those subsystems to which these actions are directly or indirectly directed, which additionally requires accounting for the factor of dynamic changes in key economic indicators.*

*Materials and Methods. The information base of the study includes analytical materials of the Verkhovna Rada of Ukraine, the Cabinet of Ministers*

*of Ukraine, the Ministry of Environmental Protection of Ukraine, the State Statistics Committee of Ukraine, research institutions and higher educational establishments; monographic studies and articles by domestic and foreign authors; materials of scientific and practical conferences; collections, annual report data, informational and analytical bulletins, weeklies; scientific research and publications available on the Internet; as well as methodological and analytical materials and documents of international organizations such as the UN, intergovernmental organizations UNEP, UNESCO, OECD, and legislative and regulatory acts concerning environmental protection policy of Ukraine and other countries.*

*The methodological foundation of the article is the systems approach to the analysis of environmental–economic interactions, developed in the works of domestic and foreign scholars. In studying the sectoral structure of the economy, the input–output method, the core theory of balance models, and elements of aggregation theory are applied. Given the economic nature of the research, elements of economic theory, microeconomics, macroeconomics, and international economics are used. The environmental component necessitated the application of knowledge from basic ecology, the concept of sustainable development, environmental protection, and natural resource management.*

*Results. The article investigates the methodological principles of modeling the material–value structure of an environmentally balanced sectoral structure of the economy under conditions of sustainable development. The expediency of using dynamic intersectoral environmental–economic input–output models for analyzing interrelations between production sectors and environmental protection activities is substantiated. The direct and dual dynamic Leontief–Ford models are considered, reflecting the consistency of the material-physical and value structures of gross output while accounting for processes of environmental pollution and its abatement. An analysis of the development trajectories of equilibrium prices and gross outputs under different assumptions regarding the*

*dynamics of value added is conducted. It is shown that increasing trajectories of the direct model correspond to decreasing trajectories of the dual model, which substantiates a new direction of research—the dynamic theory of duality in environmental–economic systems.*

*Discussion. The obtained results may be used in the formation of economic and climate policy, as well as in forecasting structural changes in the economy.*

***Key words:*** *environmental–economic modeling, input–output balance, dynamic Leontief–Ford model, environmentally balanced economy, pricing, sustainable development, material–value structure.*

**Постановка проблеми.** Дослідження галузевої структури економіки в натуральних показниках зумовлює необхідність переходу до відповідної вартісної (цінової) структури, яка відображає економічну оцінку виробничих процесів та результатів господарської діяльності. Такий перехід є принципово важливим, оскільки саме цінові показники забезпечують можливість узгодження матеріально-речових потоків із фінансово-економічними характеристиками розвитку економічної системи.

Визначення динаміки цін з урахуванням різноманітних економічних гіпотез — зокрема щодо змін у технологічній структурі виробництва, еволюції попиту і пропозиції, інфляційних процесів, державного регулювання та зовнішньоекономічних чинників — дає змогу здійснити глибокий аналіз чинної системи цін. Це, у свою чергу, створює передумови для її порівняння з розрахунковими, нормативними або модельними значеннями, отриманими в межах економіко-математичного моделювання.

У результаті такого аналізу з'являється можливість встановити та кількісно охарактеризувати взаємозв'язки між основними показниками динаміки натуральних і вартісних моделей, що відображають реальні пропорції міжгалузевої взаємодії. Це дозволяє виявити структурні дисбаланси, оцінити ефективність цінових механізмів і обґрунтувати

управлінські рішення, спрямовані на забезпечення збалансованого соціально-економічного розвитку та підвищення ефективності функціонування економічної системи в цілому.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Засоби міжгалузевого аналізу, що стали предметом дослідження цього розділу, розбудовуються в рамках методології динамічного міжгалузевого балансу та призначені для використання цієї методології при розв'язуванні конкретних задач планування. Використання методології динамічного міжгалузевого балансу в плануванні стало потужним стимулом розвитку відповідних моделей та чисельних методів. Основи сучасної теорії міжгалузевих балансових моделей викладені, наприклад, в роботах [1-3].

На даний час розроблено два способи формування номенклатури галузей в моделях міжгалузевих систем: через виокремлення „чистих" та „господарських" галузей. Виокремлення чистих галузей призводить до формування галузевої номенклатури за принципом однорідності продукції, що є основою розробки міжгалузевих технологічних зв'язків згідно з методологією міжгалузевого балансу. Поняття господарської галузі лежить в основі формування номенклатури за принципом відомчої приналежності. Така структура економічної системи може бути використана при розробці механізмів управління. Взаємозв'язок між описаними способами структуризації економічної системи висвітлено в роботах [4-5].

У цьому дослідженні в основу формування міжгалузевої системи покладено принцип виокремлення чистих галузей – як відповідної методології міжгалузевого балансу. В процесі міжгалузевого аналізу галузеві підсистеми відіграють роль блоків, в яких виконуються процедури обчислення даних, що описують галузі в термінах міжгалузевих моделей.

Схема динамічного міжгалузевого балансу пов'язується з певною структурою ресурсів, залучених у виробництво: основних фондів,

оборотних фондів, трудових ресурсів. Така класифікація грунтується на особливостях відтворення кожної категорії ресурсів та передбачає, що галузеві інформаційні масиви повинні містити достатньо даних для формування векторів витрат цих ресурсів. У подальшому структура галузевих інформаційних масивів визначається типом моделей міжгалузевого аналізу. Згідно з методологією динамічного міжгалузевого балансу галузева інформація повинна містити величини відповідних показників на кожен момент планового періоду. Цією умовою галузевим підсистемам необхідно відображати процес матеріалізації науково-технічного прогресу. Перераховані вимоги до формування галузевої інформації закладаються в основу побудови галузевих підсистем.

Перша прикладом математичної інтерпретації таких систем стала балансова модель, що охоплює взаємозв'язки економіки та навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим та Д. Фордом [6]. Вона узагальнює схему класичного міжгалузевого балансу і вміщує дві групи галузей: основне виробництво (галузі матеріального виробництва) та допоміжне виробництво (галузі зі знищення забруднень). Основні умови моделі виражаються системою рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

В системі (1) $x_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів виробництва продукції;

$x_2 = \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів знищених забруднюючих речовин;

$y_1 = \left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів кінцевої продукції;

$y_2 = \left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів незнищених забруднень;

$A_{11} = \left(a_{ij}^{11}\right)_1^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції $i$ на виробництво одиниці продукції $j$;

$A_{12} = \left(a_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції $i$ на одиницю знищення забруднювачів $g$;

$A_{21} = \left(a_{kj}^{21}\right)_{k,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювачів $k$ на одиницю виготовленої продукції $j$;

$A_{22} = \left(a_{kg}^{22}\right)_1^m$ – квадратна матриця випуску забруднювачів $k$ на одиницю знищення забруднювачів $g$.

Запропонована В. Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель [7] стала класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь в дослідженні проблем економічного зростання. За аналогією з цим для статичної еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда запропоновано відповідну динамічну балансову модель взаємодії економіки та навколишнього середовища [8]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1\dot{x}_1(t) + B_2\dot{x}_2(t) + y_1(t), \\ x_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) - y_2(t), \end{aligned} \qquad (2)$$

де $x_1(t) = \left(x_1^1(t), x_2^1(t), \ldots, x_n^1(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів виробництва продукції;

$\dot{x}_1(t) = \left(\dot{x}_1^1(t), \dot{x}_2^1(t), \ldots, \dot{x}_n^1(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик абсолютних приростів виробництва продукції;

$y_1(t) = \left(y_1^1(t), y_2^1(t), \ldots, y_n^1(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик споживання продукції, включаючи невиробниче нагромадження;

$x_2(t)=\left(x_1^2(t), x_2^2(t), \ldots, x_m^2(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів виробництва із знищення забруднювачів;

$\dot{x}_2(t)=\left(\dot{x}_1^2(t), \dot{x}_2^2(t), \ldots, \dot{x}_m^2(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик абсолютних приростів виробництва із знищення забруднювачів;

$y_2(t)=\left(y_1^2(t), y_2^2(t), \ldots, y_m^2(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів незнищених забруднювачів – викиди забруднювачів у навколишнє середовище;

$A_{11}=\left(a_{ij}^{11}\right)_1^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат на виробництво продукції (сюди належать також витрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів основного виробництва);

$A_{12}=\left(a_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат на знищення забруднювачів (сюди входять також витрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів допоміжного виробництва – очисних споруд);

$A_{21}=\left(a_{kj}^{21}\right)_{k,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів основним виробництвом;

$A_{22}=\left(a_{kg}^{22}\right)_1^m$ – квадратна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів допоміжним виробництвом – очисними спорудами;

$B_1=\left(b_{ij}^1\right)_1^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва;

$B_2=\left(b_{ig}^2\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва.

Перше рівняння системи моделює розподіл валового випуску за галузями на виробниче споживання основного та допоміжного виробництв, приріст їх основних виробничих фондів та кінцеве споживання. Друге – динаміку обсягів забруднюючих речовин.

**Метою статті** є розвиток методології моделювання теорії економічного збалансованого зростання в умовах розширення економічної системи до масштабів соціально-еколого-економічної. Основою для цього може слугувати балансова еколого-економічна модель «витрати - випуск», яка адекватно передає

узгодженість матеріально-речової та вартісної структур валового продукту в процесі аналізу варіантів розвитку галузей економічної системи.

**Матеріали і методи.** Інформаційну базу дослідження складають аналітичні матеріали Верховної Ради України, Кабінету Міністрів України, Міністерства охорони навколишнього природного середовища України, Державного комітету статистики України науково-дослідних установ та вузі; монографічні дослідження та статті вітчизняних і зарубіжних авторів, матеріали науково-практичних конференцій, збірники, дані річних звітів, інформаційних та аналітичних бюлетенів, тижневиків, наукові дослідження та публікації розміщені в мережі Internet, методичні та аналітичні матеріали й документи міжнародних організацій ООН, міжурядових організацій ЮНЕП, ЮНЕСКО, ОЕСР, а також законодавчі та нормативні акти з питань політики охорони навколишнього природного середовища України та інших держав.

Методологічною основою статті є системний підхід до аналізу еколого-економічної взаємодії, розвинутий у працях вітчизняних та зарубіжних вчених. При дослідженні галузевої структури економіки – метод „витрати-випуск", магістральну теорію балансових моделей, елементи теорії агрегування. Зважаючи на економічний характер

дослідження, застосовано елементи економічної теорії, мікро-, макроекономіки, міжнародної економіки. Екологічна складова покликала необхідність застосування знань з основ екології, концепції сталого розвитку, охорони довкілля та природокористування.

**Виклад основного матеріалу.** Застосування ринкових механізмів в еколого-економічних відносинах потребує створення нового механізму формування цін. Для ринкової економіки характерне існування вільних, об'єктивно сформованих під впливом ринкової кон'юнктури цін, переважно встановлених фірмами. Разом з тим проблеми цін взаємопов'язані з низкою інших проблем соціально-економічного розвитку, тому питання їх формування в еколого-економічних системах необхідно розглядати як на макро-, так і мікрорівні. Особливим завданням при формуванні цін для обох рівнів постає питання їх прогнозування. При цьому повинна відстежуватись динаміка зміни ціни основних еколого-економічних показників по галузях економічної та екологічної діяльності та реалізовуватись, у випадку необхідності, певне регулювання.

Нехай $p_1 \geq 0$ та $p_2 \geq 0$, як і раніше, вектори-рядки ціни на продукцію та вартість знищення забруднювачів відповідно. Помножимо зліва перше рівняння системи (2) на $p_1$, а друге рівняння на $p_2$. Одержимо

$$\begin{aligned} p_1 x_1 &= p_1 A_{11} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_1 B_1 \dot{x}_1 + p_1 B_2 \dot{x}_2 + p_1 y_1, \\ p_2 x_2 &= p_2 A_{21} x_1 + p_2 A_{22} x_2 - p_2 y_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Складемо рівності (3). Одержимо

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 A_{11} x_1 + p_2 A_{21} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_2 A_{22} x_2 + p_1 B_1 \dot{x}_1 + p_2 B_2 \dot{x}_2 + p_1 y_1 - p_2 y_2. \qquad (4)$$

Використаємо дві класичні для екологічної економіки гіпотези: „сумарна вартість споживання еколого-економічного продукту рівна сумарній оцінці виробництва" та „вартість всього капіталу незмінна в часі" [9]. Ці гіпотези означають

$$p_1 y_1 - p_2 y_2 = r_1 x_1 + r_2 x_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(p_1 B_1 x_1 + p_1 B_2 x_2\right) = \dot{p}_1 B_1 x_1 + \dot{p}_1 B_2 x_2 + p_1 B_1 \dot{x}_1 + p_1 B_2 \dot{x}_2 = 0. \quad (5)$$

З урахуванням (5) співвідношення (4) набуває вигляду

$$\left(p_1 - p_1 A_{11} - p_2 A_{21} + \dot{p}_1 B_1 - r_1\right)x_1 + \left(p_2 - p_1 A_{12} - p_2 A_{22} + \dot{p}_1 B_2 - r_2\right)x_2 = 0. \quad (6)$$

Оскільки співвідношення (6) повинно бути справедливим для будь-яких $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$, то маємо

$$p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} - \dot{p}_1 B_1 + r_1,\ p_1 \geq 0, \quad (7)$$
$$p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} - \dot{p}_1 B_2 + r_2,\ p_2 \geq 0.$$

Це і є двоїста динамічна модель Леонтьєва-Форда (модель цін). На основі другого співвідношення (7) можна дійти висновку, що збільшення в часі виробництва продукції, а також збільшення в часі обсягів знищення забруднювачів безпосередньо приводить до автоматичного зменшення в часі цін продукції та вартості знищення забруднювачів. Діє ефект незмінності в часі кількості грошей в економіці.

З метою дослідження отриманої моделі виразимо $p_2(t)$ з другого рівняння та підставимо у перше:

$$p_1(t)\left(E_1 - A_{11} - A_{12}\left(E - A_{22}\right)^{-1} A_{21}\right) + \dot{p}_1(t)\left(B_2\left(E_2 - A_{22}\right)^{-1} A_{21} + B_1\right) = r_2(t)\left(E_2 - A_{22}\right)^{-1} A_{21} + r_1(t)$$

.

Введемо позначення:

$$A_1 = A_{11} + A_{12}\left(E - A_{22}\right)^{-1} A_{21},\ B = B_2\left(E - A_{22}\right)^{-1} A_{21} + B_1,\ r(t) = r_2(t)\left(E - A_{22}\right)^{-1} A_{21} + r_1(t)$$

та перепишемо отриману рівність у вигляді:

$$p_1(t) = p_1(t)A_1 - \dot{p}_1(t)B + r(t). \qquad (8)$$

З продуктивності статичної моделі Леонтьєва-Форда випливає, що матриці $A_{11}$, $A_{22}$ та $A_1$ – продуктивні. Надалі при аналізі будемо також вважати матрицю $A_1$ нерозкладною [10].

Для подальшого аналізу отриманої моделі введемо припущення щодо зміни у часі векторів коефіцієнтів доданої вартості.

***1. Вектори коефіцієнтів доданої вартості основного та допоміжного виробництв є нуль-векторами:*** $r_1(t) = 0$, $r_2(t) = 0$.

В такому випадку система (6) набуває вигляду системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$p_1(t) = p_1(t)A_1 - \dot{p}_1(t)B.$$

Її загальний розв'язок визначається умовою

$$p_1(t) = \sum_{s=1}^{n} d_s k_s e^{\lambda_s t},$$

де $\lambda_s$ – корені характеристичного рівняння:

$$\det\left[E_1 + \lambda B\left(E_1 - A_1\right)^{-1}\right] = 0; \qquad (9)$$

$k_s$ – відповідні $\lambda_s$ власні вектори матриці $B\left(E_1 - A_1\right)^{-1}$, $d_s$ – константи, що визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=1}^{n} d_s k_s = p_1(0).$$

Відповідно до прийнятих припущень матриця $B\left(E_1 - A_1\right)^{-1}$ невід'ємна. Відповідно до теореми Перрона [11] вона має додатне власне число $\hat{\mu}$ (корінь Фробеніуса-Перрона), що перевищує за модулем всі інші власні числа цієї матриці, і відповідний йому власний вектор $\hat{k} > 0$. Інші власні вектори обов'язково мають компоненти різних знаків.

Кореню Фробеніуса-Перона $\hat{\mu}$ відповідає корінь $\hat{\lambda}$ характеристичного рівняння згідно зі співвідношенням $\hat{\lambda} = -\hat{\mu}^{-1} < 0$.

Траєкторія, що визначає розв'язок, є сумою експонент. Очевидно, що при $t \to \infty$ в ній починає переважати доданок з максимальною дійсною частиною $\lambda_s$. Можливі дві взаємно протилежні ситуації:

1. домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda}t}$;
2. домінуючою є експонента з темпом $\lambda_s \neq \hat{\lambda}$.

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі прямують до технологічного темпу приросту $\hat{\lambda}$, а гранична галузева структура національного доходу визначається пропорціями компонент власного вектора $\hat{k}$. У другому випадку траєкторія системи визначається

власним вектором $k_s$, який має компоненти різних знаків. Тому при достатньо великих $t$ у розв'язку обов'язково з'являються від'ємні компоненти.

Таким чином, розв'язок, в якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, є економічно неприйнятним.

***Зауваження.*** Порівнюючи диференціальні рівняння (2) та (8), приходимо до висновку, що темпи росту прямої та двоїстої моделей Леонтьєва-Форда рівні за величиною, але протилежні за знаком. Якщо виробництво зростає з деяким темпом, то рівноважні ціни при цьому спадають із цим же темпом. Це наслідок прийнятої нами гіпотези „вартість капіталу незмінна в часі".

***2. Вектор коефіцієнтів доданої вартості задається експоненціальною функцією*** $r(t) = r(0)e^{\nu t}$ ***(як частинний випадок при*** $\nu = 0$ ***маємо*** $r(t) = r(0) = const$***).***

При цьому вважаємо, що компоненти вектора зростають з одним і тим самим сталим темпом $\nu \geq 0$, а $r(0) \geq 0$.

Частинний розв'язок системи (8) визначається рівністю

$$p_1^0(t) = r(0)\left[E_1 + \nu B(E_1 - A_1)^{-1}\right]^{-1} e^{\nu t}, \tag{10}$$

а загальний розв'язок неоднорідної системи (7) у вигляді:

$$p_1(t) = \sum_{s=1}^{n} d_s k_s e^{\lambda_s t} + r(0)\left[E_1 + \nu B(E_1 - A_1)^{-1}\right]^{-1} e^{\nu t}. \tag{11}$$

Невизначені константи $d_s$ визначають як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{n} d_s k_s = p_1(0) - r(0)\left[E_1 + \nu B\left(E_1 - A_1\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

При відомих значеннях $k_s$ конкретні значення розв'язку (11) знаходяться шляхом задання темпу приросту споживання $\nu$.

Таким чином, виходячи із загальної теорії моделювання динамічних систем, проведено дослідження двоїстої динамічної моделі Леонтьєва-Форда, зокрема, побудовано траєкторії поведінки рівноважних цін залежно від встановлених припущень щодо зміни векторів коефіцієнтів доданої вартості основного та допоміжного виробництв. Проведений аналіз дозволяє встановити взаємозв'язок між прямою та двоїстою моделями. Так, окрім можливості переходу від однієї моделі до іншої, встановлено, що їх корені Фробеніуса-Перрона рівні за модулем, причому зростаючій траєкторії прямої задачі відповідає спадна траєкторія двоїстої, і навпаки. Останнє дає підстави вести мову про новий напрямок досліджень – динамічну теорію двоїстості.

На наступному кроці визначимо аналітичний вигляд магістральної траєкторії моделі (7).

Як і в попередньому випадку, розглядаємо наведену модель як систему неоднорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Тому в умовах поставленого завдання – визначення магістральних траєкторій – реалізуємо методику дослідження, аналогічну попередньо проведеній.

Перейдемо до розгляду відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$p_1(t) = p_1(t)A_{11} + p_2(t)A_{21} - \dot{p}_1(t)B_1,$$

$$p_2(t) = p_2(t)A_{12} + p_2(t)A_{22} - \dot{p}_1(t)B_2.$$

Будемо шукати розв'язки отриманої системи у вигляді:

$$p_1(t) = e^{vt} p_1(0),$$
$$p_2(t) = e^{vt} p_2(0).$$

З урахуванням останнього система лінійних однорідних диференціальних рівнянь визначається розв'язками:

$$p_1(0) = p_1(0)A_{11} + p_2(0)A_{21} - vp_1(0)B_1,$$
$$p_2(0) = p_1(0)A_{12} + p_2(0)A_{22} - vp_1(0)B_2.$$

Провівши серію нескладних математичних перетворень, отримуємо рівність

$$p_1(0)\left(E_1 + vB(E_1 - A_1)^{-1}\right) = 0$$

або в іншому вигляді

$$p_1(0)\left(B(E_1 - A_1)^{-1} - \lambda E_1\right) = 0,\ p_1(0) \geq 0,\ v = -\lambda^{-1}.$$

Тоді

$$\lambda = \lambda_{B(E_1 - A_1)^{-1}} > 0,\ p_1(0) = p_{B(E_1 - A_1)^{-1}} \geq 0,$$
$$v = -\mu = -\lambda^{-1}_{(E_1 - A_1)^{-1}B} < 0,$$

де $\lambda_{B(E_1-A_1)^{-1}} > 0$ – корінь Фробеніуса, а $p_{B(E_1-A_1)^{-1}} > 0$ – лівий вектор Фробеніуса матриці $B(E_1 - A_1)^{-1}$. При цьому, як легко перевірити,

$$\lambda_{B(E_1-A_1)^{-1}} = \lambda_{(E_1-A_1)^{-1}B}.$$

На наступному етапі будемо розглядати неоднорідну систему (7) за умови $r_1(t) = e^{k_1 t} r_1(0)$, $r_1(0) \geq 0$, $r_2(t) = e^{k_2 t} r_2(0)$, $r_2(0) \geq 0$. Відповідні розв'язки $p_1(t) = p_1(0)e^{vt}$, $p_2(t) = p_2(0)e^{vt}$ визначаються співвідношеннями:

$$e^{vt} p_1(0) = e^{vt} p_1(0)A_{11} + e^{vt} p_2(0)A_{21} - ve^{vt} p_1(0)B_1 + e^{k_1 t} r_1(0),$$
$$e^{vt} p_2(0) = e^{vt} p_1(0)A_{12} + e^{vt} p_2(0)A_{22} - ve^{vt} p_1(0)B_2 + e^{k_2 t} r_2(0).$$

Виразимо з другого рівняння добуток $e^{vt} p_2(0)$ та використаємо в першому рівнянні:

$$e^{vt} p_1(0)(E_1 - A_1 + vB) = e^{k_1 t} r_1(0) + e^{k_2 t} r_2(0)(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}.$$

Розв'язок цього рівняння розіб'ємо на два розв'язки $p_1^1(0)$ та $p_1^2(0)$. Проведемо спочатку дослідження рівняння $e^{vt} p_1(0)(E_1 - A_1 + v_1 B) = e^{k_1 t} r_1(0)$ за умови, що $v = k_1$, тобто рівняння $p_1(0)(E_1 - A_1 + k_1 B) = r_1(0)$. Існування оберненої матриці $(E_1 - A_1 + k_1 B)^{-1}$ пов'язане з продуктивністю матриці $-k_1 B(E - A)^{-1} \geq 0$ [12], що еквівалентне умові

$$-k_1 \lambda_{B(E_1-A_1)^{-1}} < 1,$$

тобто маємо

$$k_1 > -\mu = -\lambda^{-1}_{(E_1-A_1)^{-1}B}.$$

Розглянемо тепер рівняння

$e^{vt} p_1(0)(E_1 - A_1 + vB) = e^{k_2 t} r_2(0)(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}$ за умови $v = k_2$:

$$p_1(0)(E_1 - A_1 + k_2 B) = r_2(0)(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}.$$

З продуктивності матриці $(E_1 - A_1 + k_2 B)$ випливає, що

$$-k_2 \lambda_{(E_1 - A_1)^{-1} B} < 1,$$

тобто маємо

$$k_2 > -\mu = -\lambda^{-1}_{(E_1 - A_1)^{-1} B}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (7) визначає функція:

$$p_1(t) = Ce^{-\mu t} p_{B(E_1 - A_1)^{-1}} + e^{k_1 t} r_1(0)(E_1 - A_1 + k_1 B) + e^{k_2 t} r_2(0)(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}(E_1 - A_1 + k_2 B)^{-1}.$$

Отримана функція визначає траєкторію зміни цін за часом [13]. Аналіз отриманого розв'язку при $t \to \infty$ дозволяє вказати, що визначальними є другий та третій доданки, а вектори $r_1$ або $r_2$ залежно від $\max(k_1, k_2)$ визначають магістральну траєкторію цін.

**Висновки і перспективи подальших досліджень.** Таким чином, в проведеному дослідженні проаналізовано пряму та двоїсту динамічні моделі Леонтьєва-Форда. Зокрема, для кожного виду визначено магістральні траєкторії валових випусків та рівноважних цін. Подальшим узагальненням розглянутого матеріалу може стати можливість застосування до вищенаведених моделей уведених в попередньому розділі додаткових гіпотез стосовно балансових моделей „витрати-випуск".

- ✓ Обґрунтовано доцільність використання динамічних міжгалузевих еколого-економічних моделей як інструменту аналізу структурних пропорцій економіки з урахуванням екологічних обмежень.
- ✓ Розглянуто та проаналізовано пряму і двоїсту динамічні моделі Леонтьєва–Форда, які забезпечують узгоджений опис процесів виробництва, забруднення та очищення навколишнього середовища.
- ✓ Встановлено, що темпи зростання валових випусків у прямій моделі та темпи зміни рівноважних цін у двоїстій моделі є рівними за абсолютною величиною, але протилежними за знаком.
- ✓ Показано, що економічно прийнятними є лише ті розв'язки, які відповідають магістральним траєкторіям, визначеним власними векторами Фробеніуса–Перрона продуктивних матриць.
- ✓ Отримані результати формують теоретичне підґрунтя для розвитку динамічної теорії двоїстості та можуть бути використані при розробці механізмів державного регулювання, прогнозуванні цін та оцінюванні ефективності екологічної політики.

## Література

1. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. К.: Вища школа, 1999. 236 с.

2. Григорків В.С. Оптимізація економіки в умовах динамічної еколого-економічної рівноваги. *Вісник Київського університету. Серія Фізико-математичні науки.* 1999. Вип. 2. С. 218–227.

3. Гринів Л.С. Екологічно збалансована економіка: проблеми теорії: монографія. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2001. 240 с.

4. Онищенко І.М. Порівняльний аналіз економік на основі результатів агрегування цінами моделі Леонтьєва „витрати-випуск". *Економіст.* 2010. № 9. С. 54-56.

5. Ляшенко І.М., Онищенко А.М., Онищенко І.М. Узгодження деталізованих та агрегованих міжгалузевих балансів. *Моделі та інформаційні системи в економіці.* 2009. Вип. 80. С. 37–50.

6. Leontief W. Dynamic Analysis. In Studies in the Structure of the American Economy. Oxford University Press, New York, Chapter 3. 1953.

7. Leontiev V., Ford D. Intersectoral Analyses of the Effect of Economic Structure on Environment. *Ekonom. Math. Meth*. 1972. 3. P. 370-399.

8. Grigorkiv V.S., Lyashenko I.N. The leontief-ford dynamic optimization model under conditions of ecological equilibrium. *Cybern Syst Anal.* 2000. 36. P. 212–218. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02678667

9. Ляшенко І.М., Ляшенко О.І., Онищенко А.М. Економічні гіпотези та динаміка рівноважних цін в моделі Леонтьєва „витрати-випуск". *Економічна кібернетика*. 2009. № 3-4. С. 46–52.

10. Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. К.: Наука, 2025. 757 с.

11. Диференціальні рівняння: підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. 2-ге вид., перероб. і доп. К.: Либідь, 2003. 600 с.

12. Онищенко А.М. Міжгалузевий баланс випуску продукції з урахуванням еколого-економічних збитків. *Вісник Полтавської державної аграрної академії.* 2003. №1-2. С. 159-162.

13. Онищенко А.М. Побудова магістральної траєкторії розвитку еколого-економічної системи. *Економіка: проблеми теорії та практики. Збірник наукових праць.* 2003. Вип. 178. С. 314-325.

## References

1. Liashenko, I. M. (1999). *Ekonomiko-matematychni metody ta modeli staloho rozvytku*. Vyshcha shkola [in Ukrainian].

2. Hryhorkiv, V. S. (1999). Optymizatsiia ekonomiky v umovakh dynamichnoi ekoloho-ekonomichnoi rivnovahy. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Seriia Fizyko-matematychni nauky*, (2), 218–227 [in Ukrainian].

3. Hryniv, L. S. (2001). *Ekolohichno zbalansovana ekonomika: problemy teorii*. LNU im. I. Franka [in Ukrainian].

4. Onyshchenko, I. M. (2010). Porivnialnyi analiz ekonomik na osnovi rezultativ ahrehuvannia tsinamy modeli Leontieva "vytraty–vypusk". *Ekonomist*, (9), 54–56 [in Ukrainian].

5. Liashenko, I. M., Onyshchenko, A. M., & Onyshchenko, I. M. (2009). Uzhodzhennia detalizovanykh ta ahrehovanykh mizhhaluzevykh balansiv. *Modeli ta informatsiini systemy v ekonomitsi*, (80), 37–50 [in Ukrainian].

6. Leontief, W. (1953). Dynamic analysis. In *Studies in the structure of the American economy* (Chap. 3). Oxford University Press.

7. Leontiev, V., & Ford, D. (1972). Intersectoral analyses of the effect of economic structure on environment. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 3, 370–399.

8. Grigorkiv, V. S., & Lyashenko, I. N. (2000). The Leontief–Ford dynamic optimization model under conditions of ecological equilibrium. *Cybernetics and Systems Analysis, 36*(2), 212–218. https://doi.org/10.1007/BF02678667

9. Liashenko, I. M., Liashenko, O. I., & Onyshchenko, A. M. (2009). Ekonomichni hipotezy ta dynamika rivnovazhnykh tsin v modeli Leontieva "vytraty–vypusk". *Ekonomichna kibernetyka*, (3–4), 46–52 [in Ukrainian].

10. Hantmakher, F. R. (2025). *Teoriia matryts*. Nauka [in Ukrainian].

11. Samoilenko, A. M., Perestiuk, M. O., & Parasiuk, I. O. (2003). *Dyferentsialni rivniannia* (2nd ed.). Lybid [in Ukrainian].

12. Onyshchenko, A. M. (2003). Mizhhaluzevyi balans vypusku produktsii z urakhuvanniam ekoloho-ekonomichnykh zbytkiv. *Visnyk Poltavskoi derzhavnoi ahrarnoi akademii*, (1–2), 159–162 [in Ukrainian].

13. Onyshchenko, A. M. (2003). Pobudova mahistralnoi traiektorii rozvytku ekoloho-ekonomichnoi systemy. *Ekonomika: problemy teorii ta praktyky. Zbirnyk naukovykh prats*, (178), 314–325 [in Ukrainian].