Фізико-математичні науки

УДК 512.553

Зеліско Галина Володимирівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Львівський національний університет імені Івана Франка

Zelisko Halyna

PhD in Physics and Mathematics Sciences

Ivan Franko National University of Lviv

ПРО БУДОВУ ІДЕАЛІВ В УЛЬТРАДОБУТКАХ НЕТЕРОВИХ V-ОБЛАСТЕЙ
ON THE STRUCTURE OF IDEALS IN THE ULTRAPRODUCTS OF THE NOETHERIAN V-DOMAINS

Анотація. *Встановлено існування природної системи твірних лівих ідеалів в ультрадобутку нетерових V-областей за деяким ультрафільтром.*

Ключові слова: *Ультрадобуток кілець, нетерове кільце, V-кільце, максимальний ідеал, природна система твірних.*

Summary. *The existence of a natural system of generators for the left ideals in the ultraproduct of Noetherian V-domains under some ultrafilter is established.*

Key words: *Ultraproduct of rings, Noetherian ring, V-ring, maximal ideal, natural system of generators.*

Класична конструкція редукованого добутку та його часткового випадку ультрадобутку множин добре зарекомендувала себе в алгебрі, математичній логіці, топології та інших розділах математики. Метод ультрадобутків запропонував у 1954 році польський математик Лось, потім цей метод використовували в роботах [1-5]. Виникла потреба описати ліві ідеали в ультрадобутках чи ультрастепенях нетерових V-областей відносно

неголовного ультрафільтру над деякою нескінченною множиною, зокрема над множиною натуральних чисел.

Нехай $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – сім'я нетерових V-областей з одиницею. Нагадаємо, що V-кільцем називається асоціативне кільце з одиницею, над яким всі прості ліві та всі прості праві модулі є ін'єктивними. Якщо D – неголовний ультрафільтр над $\mathbb{N}$, то через $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$ позначимо ультрадобуток цієї сім'ї кілець за ультрафільтром D. Припустимо, що A_i – лівий ідеал в R_i для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді $A = (\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i)/D$ буде лівим ідеалом в R, який називатимемо основним лівим ідеалом у кільці R. Загальновідомо, що в нетерових V-областях довільний максимальний лівий ідеал є не більш ніж двопородженим, тобто цей ідеал породжений не більше, ніж двома елементами. Тому всі основні максимальні ліві ідеали в ультрадобутку $R = (\prod_{i\in\Omega} R_i)/D$ також є не більш, ніж двопородженими. Множину всіх основних максимальних лівих ідеалів кільця $R = (\prod_{i\in\Omega} R_i)/D$ позначимо $Lmspec^{(bs)}(R)$. Кожний елемент $r \in R$ визначає головну замкнуту підмножину $\mathbb{V}(r) = \{M \in Lmspec^{(bs)}(R) | r \in M\}$ множини $Lmspec^{(bs)}(R)$. Тоді можна розглянути Δ-фільтр над множиною головних замкнутих підмножин.

Зображення лівого ідеалу I кільця R у вигляді перетину максимальних лівих ідеалів $I = \bigcap_{i\in\Lambda} M_i$ називається нескоротним, якщо для кожного $\beta \in \Lambda$ правильним є співвідношення $I \neq \bigcap_{i\in\Lambda\setminus\{\beta\}} M_i$.

В нетеровій V-області S кожний власний лівий ідеал є перетином максимальних лівих ідеалів. Для будь-якого лівого власного ідеалу I такої області лівий модуль S/I є артіновим і нетеровим одночасно, тому володіє композиційним рядом, довжина якого є інваріантом ідеалу I. Цю довжину називають довжиною лівого ідеалу I і позначають $l(I)$. При вивченні лівих ідеалів в кільці R потрібне поняття нестандартної довжини основних лівих ідеалів. Стандартно позначаємо через $\mathbb{N}_0$ півкільце натуральних чисел з

нулем, а через $\overline{\mathbb{N}}_0$ ультрастепінь сім'ї екземплярів $\mathbb{N}_0$, заіндексований елементами $i \in \Omega$, стосовно того ж ультрафільтру, за яким беремо ультрадобуток кілець $\{R_i\}_{i\in\Omega}$. Елементи з $\overline{\mathbb{N}}_0$ називатимемо нестандартними натуральними числами, оскільки $\overline{\mathbb{N}}_0$ є нестандартною моделлю арифметики Пеано. Тоді нестандартною довжиною $\bar{l}$(A) основного ідеалу $A = (\prod_{i\in\Omega} A_i)/D$ назвемо нестандартне натуральне число $\tilde{m} = \overline{(l(A_\iota))_{\iota\in\Omega}}$, $\tilde{m} \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

Нехай задано зліченну послідовність максимальних ідеалів $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ кільця $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$. Тоді вважатимемо, що $M_i = \left(\prod_{j\in\mathbb{N}} M_{ij}\right)/D$, $i \in \mathbb{N}$, де M_{ij} – максимальний ідеал кільця R_j, $i \in \mathbb{N}$, або $M_{ij} = R_j$, якщо ідеал M_{ij} не є основним. Через $\Delta\{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ позначимо такий максимальний ідеал кільця R: $\overline{(M_{11}, M_{21} \cap M_{22}, \dots, M_{n1} \cap M_{n2} \cap \dots \cap M_{nn}, \dots}$.

У загальному випадку, якщо $\tilde{m} = \overline{(m_\iota)_{\iota\in\mathbb{N}}}$ – нестандартне натуральне число, то через $\Delta\{M_i | i \le \tilde{m}\}$ позначимо ідеал

$$\overline{\left(M_{11} \cap \dots \cap M_{1m_1}, M_{21} \cap \dots \cap M_{2m_2}, \dots, M_{\iota 1} \cap \dots \cap M_{\iota m_\iota}, \dots\right)}.$$

У випадку, коли всі R_i є нетеровими V- областями, цей ідеал можна вибрати однозначно.

Надалі будемо вважати, що послідовність максимальних ідеалів $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ має таку властивість: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \not\subseteq M_{n+1}$ для кожного $i = 1,2, \dots$ Такі послідовності будемо називати нефінітарними. Маючи таку послідовність атомів, з допомогою будь-якого ультрафільтру F над $\mathbb{N}$ можемо визначити деякий лівий ідеал кільця R який позначимо $I(M,F)$. Цей ідеал задається рівністю $I(M,F) = \sum_{U\in F}(\bigcap_{i\in U} M_i)$.

Відомо, що існує єдиний максимальний ідеал кільця $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$ в якому міститься лівий ідеал $I(M,F)$, позначатимемо його через $\overline{I(M,F)}$.

Нехай задано нестандартне натуральне число $\tilde{n} \in \overline{\mathbb{N}}_0$ Припустимо, що $\tilde{n} = \overline{(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)}$, де $n_k \in \mathbb{N}_0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ розглянемо симетричну групу S_{n_i} і матимемо сім'ю скінченних груп

$\{S_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Тепер можемо побудувати ультрадобуток $\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} S_{n_i}\right)/D$ сім'ї груп $\{S_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ відносно того ж ультрафільтру, відносно якого побудовано ультрадобуток сім'ї кілець $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Ми отримали групу $S_{\tilde{n}}$, яку називатимемо псевдосиметричною групою. Якщо $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty$, то потужність групи $S_{\tilde{n}}$ є не меншою, ніж континуум. Отже, $S_{\tilde{n}}$ – континуальна група для кожного нестандартного натурального числа $\tilde{n} \in \overline{\mathbb{N}}$, яке не є стандартним. Зазначимо, що задання групи $S_{\tilde{n}}$ не залежить від вибору представника $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ в класі еквівалентності $\tilde{n}$. Якщо $\tilde{\sigma} \in S_{\tilde{n}}$, то вважатимемо, що $\tilde{\sigma} = \overline{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots)}$, де $\sigma_k \in S_{n_k}$ для кожного $k \in U$, де U – деяка множина з D.

Тепер візьмемо довільний ідеал вигляду $\Delta\{M_{\tilde{m}} | \tilde{m} \le \tilde{n}\} \subset I(M, F)$, де $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ така послідовність максимальних ідеалів кільця R, що $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nsubseteq M_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і F – неголовний ультрафільтр над $\mathbb{N}$. Для кожної псевдопідстановки $\tilde{\sigma} \in S_{\tilde{n}}$ і для кожного максимального ідеалу $M_{\tilde{m}}$, де $\tilde{m} \le \tilde{n}$, який складається з елементів вигляду $\overline{(m_{\iota_1 1}, m_{\iota_2 2}, \dots, m_{\iota_k k}, \dots)}$, де $m_{i_1 1} \in M_{i_1 1}$, $m_{i_2 2} \in M_{i_2 2}, \dots, m_{i_k k} \in M_{i_k k}, \dots$, тобто $M_{\tilde{m}} = \overline{(M_{\iota_1 1}, M_{\iota_2 2}, \dots, M_{\iota_k k}, \dots)}$, одержуємо новий максимальний ідеал

$$M_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})} = \overline{(M_{\sigma_1(\iota_1)1}, M_{\sigma_2(\iota_2)2}, \dots, M_{\sigma_k(\iota_k)k}, \dots)},$$

який складається з елементів $\overline{(m_{\sigma_1(\iota_1)1}, m_{\sigma_2(\iota_2)2}, \dots, m_{\sigma_k(\iota_k)k}, \dots)}$. Зокрема, ми одержали нову послідовність максимальних ідеалів $\tilde{\sigma}(M) = \{M_{\tilde{\sigma}(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$, яка має ту ж властивість, що й M, тобто $\bigcap_{i=1}^{n} M_{\tilde{\sigma}(i)} \nsubseteq M_{\tilde{\sigma}(n+1)}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що $\Delta\{M_{\tilde{m}} | \tilde{m} \le \tilde{n}\} = \Delta\{M_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})} | \tilde{m} \le \tilde{n}\}$ для кожної псевдопідстановки $\tilde{\sigma} \in S_{\tilde{n}}$.

Продовжимо дію псевдосиметричної групи на множині зліченних послідовностей максимальних ідеалів вигляду $M_{\tilde{m}}$ на множину ідеалів вигляду $I(N, F)$, де N пробігає зліченні нефінітарні послідовності максимальних ідеалів, всі компоненти яких є ідеалами типу M_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$, причому таких, що $\Delta\{N_{\tilde{m}} | \tilde{m} \le \tilde{n}\} = \Delta\{M_{\tilde{m}} | \tilde{m} \le \tilde{n}\}$. При цьому

послідовність максимальних ідеалів M вважаємо фіксованою. Для спрощення ідеал $M_{\tilde{\sigma}(i)}$ позначатимемо через N_i. Тоді послідовність $\tilde{\sigma}(M)$ співпадає з послідовністю $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Одержуємо новий лівий ідеал $I(N,F)$ кільця R. Покладемо $\tilde{\sigma}\cdot I(M,F)=I(N,F)$. Вияснимо, якими повинні бути псевдопідстановка $\tilde{\sigma}$ і ультрафільтр F, щоб ліві ідеали $I(M,F)$ і $I(N,F)$ були різними.

Твердження 1. Якщо для кожного $i\in\mathbb{N}$ довжини орбіт підстановок σ_i не є обмеженими, то ідеали $I(M,F)$ і $I(N,F)$ є різними.

Доведення. Нехай для кожного $i\in\mathbb{N}$ $\sigma_i=\tau_i\varrho_i$, де τ_i – цикл довжини k_i і припустимо, що $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=\infty$. Розіб'ємо множину чисел $\{1,2,\dots,n_i\}$ на дві підмножини A_i і B_i так, щоб $\sigma_i(A_i)\subseteq B_i$ і $A_i\cap B_i=\emptyset$. Ми можемо вважати, що $CardA_i=CardB_i=n_i/2$, якщо n_i є парним, або ж $CardA_i=CardB_i=(n_i-1)/2$, якщо n_i – непарне. Тому $\lim\limits_{i\to\infty}CardA_i=\infty$.

Розглянемо дві множини максимальних ідеалів $X=\{M_{\tilde{m}}|m_i\in A_i$ для всіх $i\in\mathbb{N}\}$ та $Y=\{M_{\tilde{m}}|m_i\in B_i$ для всіх $i\in\mathbb{N}\}$. Тоді ідеали $A=\Delta\{M_{\tilde{m}}|X\}$ і $B=\Delta\{M_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})}|Y\}$ не перетинаються і $A\in I(M,F)$, $B\in I(N,F)$. Твердження доведено.

Твердження 2. Існує не менше, ніж континуум послідовностей $N_\alpha=\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ максимальних лівих ідеалів кільця R, кожний з яких має вигляд $M_{\tilde{m}}=\overline{(M_{\iota_1 1},M_{\iota_2 2},\dots,M_{\iota_k k},\dots)}$ для деякого нестандартного натурального числа $\tilde{m}\le\tilde{n}$ і таких, що $I(N_\alpha,F)\neq I(N_\beta,F)$ для $\alpha\neq\beta$.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{i\to\infty}n_i=\infty$, то максимальна кількість циклів кожної з груп S_{n_i} збільшується зі збільшенням номера i. Отже, потужність множини псевдопідстановок, довжини орбіт яких не є обмеженими, є не менша, ніж континуум. Якщо з кожної пари взаємно обернених підстановок залишити тільки одну підстановку, то залишиться континуальна множина

псевдопідстановок. Тоді за твердженням 1 одержуємо континуум попарно різних лівих ідеалів вигляду $I(N_\alpha, F)$. Твердження доведено.

Оскільки множина ультрафільтрів над множиною $\mathbb{N}$ має потужність $2^{2^{\aleph_0}}$, то елемент $\Delta\{M_{\tilde{m}} | \tilde{m} \leq \tilde{n}\}$ міститься в $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно різних максимальних лівих ідеалах кільця R.

Твердження 3. Нехай F – Δ-ультрафільтр замкнутих підмножин множини $Lmspec^{(bs)}(R)$, які відповідають лівому максимальному ідеалу $I(M, F)$. Якщо існує зліченна послідовність $N = \{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ таких максимальних ідеалів кільця R, що для кожної головної замкнутої підмножини $S = \mathbb{V}(a) \in F$ множина $S \cap \{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ є непорожньою, то існує такий ультрафільтр G над множиною $\mathbb{N}$, що $\overline{I(N,G)} = I(N,G) = \overline{I(M,F)}$.

Доведення. Нагадаємо, що $\mathbb{V}_N(a) = \{i \in N | a \in N_i\}$. З умов твердження випливає, що $\mathbb{V}_N(a) \neq \emptyset$ для кожного $a \in \overline{I(M,F)}$. Легко перевірити, що множина $G = \{\mathbb{V}_N(a) |\ a \in \overline{I(M,F)}\}$ є ультрафільтром над множиною $\mathbb{N}$. Очевидно, що $I(N,G) \supseteq \overline{I(M,F)}$. Оскільки ідеал $\overline{I(M,F)}$ є максимальним ідеалом, то $I(N,G) = \overline{I(M,F)}$. Твердження доведено.

Означення. Система твірних $\{a_i\}_{i\in[0;\,\alpha_0]}$ і $\{b_i\}_{i\in[0;\,\alpha_0]}$ лівого ідеалу I нетерової V-області R називається природною системою твірних, якщо виконуються такі умови:

П.С.Т.1. Для кожного негранічного числа $\beta \in [0;\ \alpha_0)$ елементи a_β і b_β виражаються через елементи $a_{\beta-1}$ і $b_{\beta-1}$;

П.С.Т.2. Для кожного граничного числа $\beta \in [0;\ \alpha_0)$ елементи a_β і b_β виражаються через елементи a_0 і b_0;

П.С.Т.3. α_0 є найменшим граничним трансфінітним числом, для якого існує система твірних ідеалу I, пронумерована трансфінітними числами, що належать інтервалу $[0;\ \alpha_0)$ і для якої виконуються властивості П.С.Т.1 та П.С.Т.2.

Твердження 4. Для довільного лівого ідеалу I нетерової V-області R існує така система твірних $\{a_i\}_{i\in[0;\,\alpha_0]}$ і $\{b_i\}_{i\in[0;\,\alpha_0]}$, де α_0 є граничним трансфінітним числом, що виконуються умови П.С.Т.1, П.С.Т.2 та П.С.Т.3.

Доведення. Нехай β_0 – трансфінітне число і I – довільний ідеал в R. Виберемо довільні ненульові елементи $a_0,\ b_0 \in I$, які будуть входити в систему твірних. Нехай для деякого трансфінітного числа $[0;\ \beta_0)$ для кожного $\beta \in [0;\ \alpha)$ елементи $a_\beta \in I$ і $b_\beta \in I$ з системи твірних вже вибрані, причому для $\{a_i\}_{i\in[0;\,\alpha)}$ і $\{b_i\}_{i\in[0;\,\alpha)}$ виконуються умови П.С.Т.1 і П.С.Т.2.

Якщо лівий ідеал I_α, породжений системами твірних a_β і b_β, $\beta < \alpha$ співпадає з I, то ми вже маємо потрібну природну систему твірних. Нехай $I \neq I_\alpha$ і α є граничним трансфінітним числом. Очевидно, що $I_\alpha \subset I$ і існують ненульові елементи $c_1, c_2 \in I\backslash I_\alpha$. Розглянемо лівий ідеал $(Ra_0 + Rb_0) + (Rc_1 + Rc_2) = Ra_\alpha + Rb_\alpha$. Якщо α не є граничним трансфінітним числом, то a_α і b_α визначаємо з рівності $Ra_\alpha + Rb_\alpha = (Ra_{\alpha-1} + Rb_{\alpha-1}) + (Rc_1 + Rc_2)$. Оскільки природна система твірних не може мати потужність, більшу за потужність кільця, то існує таке трансфінітне число $\alpha_0 \leq \beta_0$, для якого $\sum_{\alpha<\alpha_0}(Ra_\alpha + Rb_\alpha) = I$, причому α_0 можна вважати граничним. Насправді, якщо α_0 не є граничним трансфінітним числом, то повторимо наші міркування, використовуючи елементи $\{a_i\}_{i<\alpha_0}$ і $\{b_i\}_{i<\alpha_0}$, але побудову почнемо з найбільших правих спільних дільників елементів a_0, a_α і b_0, b_α.

Перевіримо виконання умови П.С.Т.3. Кажемо, що трансфінітне число α має властивість φ, якщо існують системи твірних $\{a_i\}_{i\in[0;\,\alpha)}$ і $\{b_i\}_{i\in[0;\,\alpha)}$, які задовольняють умови П.С.Т.1 і П.С.Т.2. Множина всіх трансфінітних чисел, які володіють властивістю φ є непорожньою, тому має максимальний елемент α_0. Отже, ми знайшлм α_0 з умови П.С.Т.3. Твердження доведено.

Література

1. Bell J.L., Slomson A.B. Models and ultraproducts, an introduction. Amsterdam, North-Holland, 1969. 319 p.

2. Cherlin G.L. Ideals of integers in nonstandard number fields. Model Theory and Algebra, eds D. Saracino and Weispfenning V., Springer Lecture Notes. Berlin, 1975. No 498. P. 60-90.

3. Cozzens J., Faith C. Simple Noetherian rings. Cambridge, 1975. 135p.

4. Jensen C.U., Lenzing H. Model theoretic algebra: with particular emphasis on fields, rings, modules. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1989. 443 p.

5. Kochen S. Ultraproducts in the theory of models. Ann. Math., ser. 2, 1961. No 74. P. 221-261.