Фізико-математичні науки

УДК 512.553

Зеліско Галина Володимирівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Львівський національний університет імені Івана Франка

Zelisko Halyna

PhD in Physics and Mathematics Sciences

Ivan Franko National University of Lviv

ПРО МАКСИМАЛЬНІ ІДЕАЛИ В УЛЬТРАДОБУТКАХ КІЛЕЦЬ
ON MAXIMAL IDEALS IN THE ULTRAPRODUCTS OF THE RINGS

Анотація. *Встановлено будову максимальних лівих ідеалів в ультрадобутку сім'ї кілець за деяким ультрафільтром.*

Ключові слова: *Ультрадобуток кілець, нетерове кільце, V-кільце, максимальний ідеал.*

Summary. *The structure of maximal left ideals in the ultraproduct of a family of rings under some ultrafilter is established.*

Keywords: *Ultraproduct of rings, Noetherian ring, V-ring, maximal ideal.*

Одним із важливих методів побудови нових алгебраїчних систем є метод ультрадобутків, запропонований у 1954 році польським математиком Лосем. Перевагою цього методу, серед інших, є те, що структури, побудовані за його допомогою, мають ті ж властивості першого порядку, що й вихідні структури. Цьому методу присвячена велика кількість наукових робіт [1-5], які стосуються як загальних алгебричних структур, так і спеціальних, таких як абелеві групи, кільця, модулі, поля та інші. Здебільшого, метод ультрадобутків є найкращим способом вирішення задач теоретико-модельного характеру, але дуже часто цей метод може бути корисним при

побудові певних контрприкладів. Через це виникає потреба у вивченні алгебраїчної будови ультрадобутків деяких алгебраїчних систем.

Нехай $\{R_i\}_{i\in\Omega}$ – сім'я нетерових V-областей з одиницею, Ω – нескінченна множина індексів. Якщо D – неголовний ультрафільтр над Ω, то через $R = (\prod_{i\in\Omega} R_i)/D$ позначимо ультрадобуток цієї сім'ї кілець за ультрафільтром D. Припустимо, що A_i – лівий ідеал в R_i для кожного $i \in \Omega$. Тоді $A = (\prod_{i\in\Omega} A_i)/D$ буде лівим ідеалом в R, який називатимемо основним лівим ідеалом у кільці R. Загальновідомо, що в нетерових V-областях довільний максимальний лівий ідеал є не більш ніж двопородженим, тобто цей ідеал породжений не більше, ніж двома елементами. Тому всі основні максимальні ліві ідеали в ультрадобутку $R = (\prod_{i\in\Omega} R_i)/D$ також є не більш, ніж двопородженими.

Для чіткішого описання максимальних лівих ідеалів в ультрадобутках обмежимося найтиповішим випадком, коли множина індексів є зліченною. Крім того, ультрафільтр D, відносно якого розглядаємо ультрадобуток, вважаємо зліченно-неповним або неголовним.

Зафіксуємо деякі позначення. Якщо задано зліченну послідовність максимальних ідеалів $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ кільця $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$ то будемо вважати, що $M_i = \left(\prod_{j\in\mathbb{N}} M_{ij}\right)/D$, $i \in \mathbb{N}$, де M_{ij} – максимальний ідеал кільця R_j, $i \in \mathbb{N}$, або $M_{ij} = R_j$, якщо ідеал M_{ij} не є основним. Через $\Delta\{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ позначимо такий максимальний ідеал кільця R:

$$\overline{(M_{11}, M_{21} \cap M_{22}, \dots, M_{n1} \cap M_{n2} \cap \dots \cap M_{nn}, \dots}.$$

У загальному випадку, якщо $\widetilde{m} = \overline{(m_\iota)_{\iota\in\mathbb{N}}}$ – нестандартне натуральне число, то через $\Delta\{M_i | i \le \widetilde{m}\}$ позначимо ідеал

$$\overline{\left(M_{11} \cap \dots \cap M_{1m_1}, M_{21} \cap \dots \cap M_{2m_2}, \dots, M_{\iota 1} \cap \dots \cap M_{\iota m_\iota}, \dots\right)}.$$

У випадку, коли всі R_i є нетеровими V- областями, цей ідеал можна вибрати однозначно.

Надалі будемо вважати, що послідовність максимальних ідеалів $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ має таку властивість: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nsubseteq M_{n+1}$ для кожного $i = 1,2,\ldots$ Такі послідовності будемо називати нефінітарними. Маючи таку послідовність атомів, з допомогою будь-якого ультрафільтру F над $\mathbb{N}$ можемо визначити деякий лівий ідеал кільця R який позначимо $I(M,F)$. Цей ідеал задається рівністю $I(M,F) = \sum_{U\in F}(\bigcap_{i\in U} M_i)$.

Твердження 1. Нехай $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ послідовність максимальних ідеалів кільця $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$ для якої $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nsubseteq M_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо ідеал B міститься в ідеалі $\Delta\{M_i | i \le \tilde{m}\}$, який не міститься в жодному з ідеалів $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ $n = 1,2,\ldots$, то існує таке нестандартне число $\tilde{n} < \tilde{m}$, що $B + \Delta\{M_i | i \le \tilde{n}\} = R$.

Доведення. Нехай $D_n = B \cap M_1 \cap \ldots \cap M_n$ і припустимо, що $D_n \cap M_{n+1} \subseteq M_{n+2}$ для деякого $n = 1,2,\ldots$. Нехай n_0 – найменше з таких натуральних чисел. Тоді $D_{n_0} \nsubseteq M_{n_0+1}$ і $D_{n_0} \nsubseteq M_{n_0+2}$. Але ми знаємо, що $D_{n_0+1} \subset M_{n_0+2} \cap M_{n_0+1}$. Розглянемо деяке зображення ідеалу B у вигляді нескоротного перетину максимальних двопороджених лівих ідеалів $B = \bigcap_{j\le\tilde{k}} N_j$ де j – нестандартні номери атомів і $\tilde{k}$ – нестандартна довжина ідеалу B. Тоді $\left(\bigcap_{j\le\tilde{k}} N_j\right) \cap M_1 \cap \ldots \cap M_{n_0}$ є нескоротним перетином для лівого ідеалу D_0. Далі, $D_0 \cap M_{n_0+1} = D_{n_0+1}$. Отже, ми можемо використовувати двопороджені максимальні ідеали M_{i_0+1} і M_{i_0+2} як перші два елементи зображення лівого ідеалу D_{n_0+1} у вигляді нескоротного перетину , а решту елементів цього зображення беремо з множини $\{N_j\}_{j<\tilde{k}}$. Тоді існує такий нестандартний номер j_0, що N_{j_0} не використовується в отриманому зображенні. Отже, $D_{n_0+1} = \left(\bigcap_{j<\tilde{k}, j\neq j_0} N_j\right) \cap M_{n_0+1} \cap M_{n_0+2}$. Тому $D_{n_0+1} \subset B$ і $D_{n_0+1} \subset M_{n_0+1} \cap M_{n_0+2}$, отже, ідеали $M_{n_0+1} \cap M_{n_0+2}$ та B мають непорожній перетин. Це суперечить тому, що $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ не міститься в тих максимальних ідеалах, в яких міститься ідеал B. Ми встановили, що $B \cap$

$M_1 \cap \ldots \cap M_n \nsubseteq M_{n+1}$ для кожного $n = 1,2, \ldots$. Тому можна добудувати зображення $B = \bigcap_{j \le \tilde{k}} N_j$ до нескоротного перетину максимальних двопороджених лівих ідеалів для лівого ідеалу $\Delta\{M_i | i \le \tilde{m}\}$, який має серед ідеалів, які перетинаються, ліві максимальні ідеали M_i для кожного $i = 1,2, \ldots$ Тобто, $\Delta\{M_i | i \le \tilde{m}\} = B \cap (\bigcap_i S_i)$, де серед S_i зустрічаються всі максимальні ідеали M_i. Нехай $\bigcap_i S_i = T$, $T \subset R$. За побудовою $T \subseteq M_i$ для кожного $= 1,2, \ldots$ Тому $T \subset \Delta\{M_i | i \le \tilde{n}\}$ і $+\Delta\{M_i | i \le \tilde{n}\} = R$. Твердження доведено.

Припустимо, що для послідовності лівих максимальних ідеалів $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ правильні такі співвідношення: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nsubseteq M_{n+1}$ і $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \nsubseteq N_{n+1}$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$. Нехай $V_M(A) = \{i \in \mathbb{N} | A \subset M_i\}$. Припустимо, що $A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. Якщо $A = B \cap C$ і $B + C = A$, то ідеал C називаємо доповненням до ідеалу B в A. Якщо ж $V_M(B) \in F$, то ідеал B називаємо F-доповненням до ідеалу C в A. Якщо ж для заданого ідеалу $C \supset A$ такого ідеалу B не існує, то кажемо, що ідеал C не має F-доповнення в A. Очевидно, що кожний ідеал $C \supset A$, для якого $V_M(C) \in F$, не має F-доповнення. Взагалі кажемо, що ідеал C в кільці R не має F-доповнення, якщо він містить деякий ідеал $A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ і не має в ньому жодного F-доповнення.

Нехай ідеал B містить ненульовий ідеал $A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. Максимальний ідеал M_k називатимемо свояком ідеалу B, якщо існують такі максимальні ідеали $M_{i_1}, \ldots, M_{i_n}$ з послідовності $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$, що правильна рівність: $B \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n} \cap M_k = B \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n}$, причому $k \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$. Ідеал M_i, який не є свояком для B, будемо називати чужим для B. Якщо ми зафіксували ідеал $B \supset A$, то одержимо розбиття множини $\mathbb{N}$ таким чином: $\mathbb{N} = U_B \cup V_B$, де $U_B = \{k | M_k - \text{свояк для } B\}$, $V_B = \{k | M_k - \text{чужий для } B\}$. Легко бачити, що $V_M(B) \subseteq U_B$.

Твердження 2. Ідеал $B \supset A$, $A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, $A \neq 0$, має F-доповнення в A тоді і тільки тоді, коли множина номерів чужих для ідеалу B максимальних ідеалів з послідовності $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ належить до ультрафільтру F.

Доведення. Нехай $V_B \in F$. Розглянемо ідеал $D = \bigcap_{i \in V_B} M_i$, припустимо, що $D + A = C_1$, $C_1 \subset \bigcap_{i \in V_B} M_i$. Нехай $B + C_1 = C_2$, де $C_2 \neq R$. Якщо $C_2 \subset N$, де N – деякий максимальний ідеал в кільці R, то $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n} \not\subseteq N$ для будь-якої скінченної множини індексів $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq V_B$, оскільки $B \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n} \neq B \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k - 1} \cap M_{i_k + 1} \cap \ldots \cap M_{i_n}$ для кожного $k = 1,2, \ldots, n$. Звідси отримуємо рівність $C_2 + M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n} = R$ для кожної такої множини індексів $I \subset V_B$. Отже, виконуються умови твердження 1, тому існує такий ідеал $C_3 \supset C_1$, що $C_2 + C_3 = R$ і $C_3 \subset \bigcap_{i \in V_B} M_i$. Тоді $B + C_3 = R$, а також існує такий ідеал T в R, що $B \cap C_3 \cap T = A$. Нехай $C_3 \cap T = C$. Тоді $B \cap C = A$ і, крім того, $B + C = A$. Співвідношення $V_M(C) \supseteq V_M \in F$ показує, що ідеал C є F-доповненням до ідеала B в A.

Навпаки, припустимо, що ідеал $D \supset A$ має F-доповненням C в A. Тоді $V_M(C) \in F$ і завдяки рівності $B + C = A$ одержуємо, що кожний максимальний ідеал M_k з множини $V_M(C)$ є чужим з B а тому $V_M(B) \supset V_B$. Це показує, що $V_B \in F$. Твердження доведено.

Твердження 3. При виконанні умов твердження 2 ідеал B не має F-доповнення тоді і тільки тоді, коли множина всіх номерів ідеалів-свояків ідеалу B належить до ультрафільтру F.

Доведення. Очевидно, що якщо множина U_B номерів ідеалів-свояків ідеалу B не належить до ультрафільтру F, то множина V_B всіх номерів чужих ідеалів до ідеалу B з послідовності $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ належить до F і у цьому випадку ідеал B має F-доповнення згідно твердження 2. Отже, можемо вважати, що множина номерів ідеалів-свояків кожного такого ідеалу B який не має F-доповнення, належить до ультрафільтру F. Тоді множина номерів ідеалів з

послідовності $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, які є чужими до ідеалу B не належить до F, і за твердженням 2 ідеал B не має F-доповнень. Твердження доведено.

Зауваження 1. Якщо при виконанні умов попередніх тверджень ідеали $B_1 \subset R$ і $B_2 \subset R$ є такими, що $U_{B_1} \in F$ і $U_{B_2} \in F$ то множина всіх номерів ідеалів-свояків для ідеалу $B = B_1 \cap B_2$ також належить до ультрафільтру $\mathbb{N}$, тобто $U_B = U_{B_1} \cap U_{B_2}$.

Зауваження 2. Для кожного ненульового ідеалу $A \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ і для будь-якого ідеалу $B \supset A$ та його доповнення C в A один і тільки один з ідеалів B і C не має F-доповнення в A.

Теорема. Нехай $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – сім'я лівих нетерових V-областей, $D -$ зліченно-неповний ультрафільтр над $\mathbb{N}$ і $R = (\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i)/D$. Якщо $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ така послідовність максимальних ідеалів кільця R, що $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nsubseteq M_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і F – неголовний ультрафільтр над $\mathbb{N}$, то наступні умови щодо множини $\mathcal{M} \subset R$ еквівалентні:

1. Множина $\mathcal{M}$ складається зі всіх тих ідеалів кільця R, які не мають F-доповнень;
2. Множина $\mathcal{M}$ складається зі всіх тих ідеалів кільця R, множини індексів ідеалів-свояків яких належить до F;
3. Множина $\mathcal{M}$ є єдиним максимальним лівим ідеалом кільця R, який містить лівий ідеал $I(M, F)$.

Доведення. Еквівалентність умов 1 і 2 випливає з твердження 3. Покажемо, що з умови 1 випливає умова 3. Спочатку переконаємося, що множина $\mathcal{M}$, яку визначено в умові 1, насправді є лівим максимальним ідеалом кільця R. Нехай $x, y \in \mathcal{M}$. Тоді множина номерів елементів-свояків елемента $z = (x, y)_r$ належить до F. Нехай s – довільний елемент з R. Тоді елемент zs також має таку множину елементів-свояків, що множина їхніх номерів належить до F. Тому $Rz \subseteq \mathcal{M}$, отже, $x + y \in \mathcal{M}$ і $rx \in \mathcal{M}$ для будь-якого $r \in R$, оскільки $x \in Rz$. Якщо $d \notin \mathcal{M}$, то d має F-доповнення в

деякому елементі a, де $Ra \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. Нехай елемент c є доповненням до елемента d в a. Тоді елемент c не має F-доповнень в a. Отже, $c \in \mathcal{M}$ і $Rd + Rc = R$. Тому $Rd + \mathcal{M} = R$ і $\mathcal{M}$ є максимальним ідеалом кільця R. Покажемо, що він є єдиним максимальним лівим ідеалом, який містить ідеал $I(M,F)$. Нехай $\mathcal{L}$ – інший максимальний лівий ідеал, який містить ідеал $I(M,F)$. Тоді $\mathcal{M} + \mathcal{L} = R$ і $u + v = 1$ для деяких $u \in \mathcal{M}$, $v \in \mathcal{L}$. Якщо u_1 (відповідно v_1) – найбільший спільний правий дільник елементів a і u (відповідно v), де $Ra \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, то u не має F-доповнень в a, отже, і u_1 не має F-доповнень в a, тому $u_1 \in \mathcal{M}$. Елемент $v_1 \notin \mathcal{M}$, тому v_1 має деяке F-доповнення c в a. Очевидно, що $Rc \subset I(M,F)$ і $Rc + Rv_1 = R$. Звідси $I(M,F) + \mathcal{L} = R$. Це суперечить тому, що $I(M,F) \subseteq \mathcal{L}$. Отже, $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, тобто $\mathcal{M}$ є єдиним максимальним лівим ідеалом, який містить ідеал $I(M,F)$.

Покажемо, що з умови 3 випливає умова 1. Нехай $\mathcal{M}$ – єдиний максимальний лівий ідеал кільця R, який містить лівий ідеал $I(M,F)$. Покажемо, що жоден елемент з $\mathcal{M}$ не має F-доповнень. Нехай $u \in \mathcal{M}$, $Ra \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, $Ru + Ra = Rd$. Тоді $Ra \subset I(M,F)$ і $d \in \mathcal{M}$. Припустимо, що c є F-доповненням елемента d в a. Тоді $c \notin \mathcal{M}$ і $Rc \subset I(M,F)$, що неможливо, оскільки $I(M,F) \subseteq \mathcal{M}$. Отже, d не має F-доповнень в a, тому і елемент u не має F-доповнень в $a_1 = [u,a]_l$, $Ra_1 \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. Отже, $\mathcal{M}$ міститься в множині всіх елементів кільця R, що не мають F-доповнень. Оскільки $\mathcal{M}$ – максимальний ідеал, то ці ідеали співпадають. Теорему доведено.

Література

1. Bell J.L., Slomson A.B. Models and ultraproducts, an introduction. Amsterdam, North-Holland, 1969. 319 p.

2. Cherlin G.L. Ideals of integers in nonstandard number fields. Model Theory and Algebra, eds D. Saracino and Weispfenning V., Springer Lecture Notes. Berlin, 1975. No 498. P. 60-90.

3. Cozzens J., Faith C. Simple Noetherian rings. Cambridge, 1975. 135p.

4. Jensen C.U., Lenzing H. Model theoretic algebra: with particular emphasis on fields, rings, modules. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1989. 443 p.

5. Kochen S. Ultraproducts in the theory of models. Ann. Math., ser. 2, 1961. No 74. P.221-261.