Фізико-математичні науки

УДК 517.956:519.688:004.94

Подошвелев Юрій Георгійович

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри математичного аналізу та інформатики

Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка

Podoshvelev Yurii

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University

Кононович Тетяна Олександрівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри математичного аналізу та інформатики

Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка

Kononovych Tetyana

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University

АНАЛІЗ СИМЕТРІЙ СИСТЕМ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В СЕРЕДОВИЩАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

ANALYSIS OF SYMMETRY SYSTEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS IN COMPUTER MATHEMATICS ENVIRONMENTS

Анотація. *У статті розглянуто застосування методів групового аналізу до систем диференціальних рівнянь математичної фізики із використанням сучасних середовищ комп'ютерної математики. Проаналізовано можливості пакетів систем комп'ютерної алгебри для автоматизації пошуку симетрій, побудови операторів Лі, інваріантних змінних і редукованих рівнянь. Викладено основні етапи алгоритмічного та*

комп'ютерного підходу щодо проведення симетрійного аналізу, наведено приклад їх застосування до узагальненої системи рівнянь Бюргерса. Здійсненено порівняльний аналіз ефективність використання програмно-реалізованих алгоритмів пошуку симетрій у розрізі методу Лі.

Ключові слова: *симетрія, система, диференціальне рівняння, математична фізика, метод Лі, системи комп'ютерної алгебри, Maple, Mathematica, інваріант, розв'язок.*

Summary. *The article considers the application of group analysis methods to systems of differential equations of mathematical physics using modern environments of computer mathematics. The capabilities of computer algebra system packages for automating the search for symmetries, constructing Lie operators, invariant variables, and reduced equations are analyzed. The main stages of the algorithmic and computer approach to symmetric analysis are outlined, and an example of their application to the generalized system of Burgers' equations is given. A comparative analysis of the effectiveness of software-implemented algorithms for searching for symmetries in terms of Lee's method was carried out.*

Key words: *symmetry, system, differential equation, mathematical physics, Lie method, computer algebra systems, Maple, Mathematica, invariant, solution.*

Як відомо, диференціальні рівняння математичної фізики (ДРМФ) становлять основу математичного опису процесів і явищ, що відбуваються у природі. Вони відображають еволюцію станів систем та закономірності зміни фізичних величин у просторі й часі. Формалізація фундаментальних законів природи за допомогою ДРМФ ґрунтується на аналізі взаємозв'язку між шуканими функціями та їхніми похідними, що визначає структуру і властивості відповідних математичних моделей. Цей взаємозв'язок найповніше розкривається через метод симетрійної редукції, або груповий

метод Лі. Підставою щодо формування симетрійного підходу, започаткованого Софусом Лі, стала інтерпретація вченими ДРМФ не лише як алгебраїчних співвідношень, а як динамічних систем, що володіють певними інваріантними характеристиками.

Таким чином, метод групових симетрій Лі (класичний метод Лі) – це основний інструмент структурного аналізу математичних моделей, що забезпечує глибоке розуміння внутрішніх закономірностей ДРМФ і сприяє пошуку їх точних розв'язків. Ефективність даного методу є загальновизнаною. При цьому він дозволяє встановити перетворення, що залишають інваріантними рівняння або системи диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП), забезпечує не лише їх аналітичне розв'язання, а й засоби класифікації. Метод докладно описаний у багатьох працях, присвячених цій тематиці, наприклад в [1].

Із точки зору системного підходу до класичного методу Лі, останній дає змогу здійснювати редукцію складності системи. Використання знайдених інваріантів дозволяє зменшити розмірність або порядок вихідної системи ДРЧП. Це рівнозначно пошуку підпростору в просторі станів, у якому динаміка системи залишається незмінною. Інваріантні розв'язки, що отримуються в результаті редукції, характеризують особливі та стійкі режими функціонування системи (у термінах системного аналізу – це атрактори або рівноважні стани).

Ключем до знаходження Лієвської групи симетрій є нескінченно малий генератор групи (інфінітезимальний оператор Лі), якому, відповідно до теореми Нетер, відповідає певний закон збереження (наприклад, збереження енергії чи імпульсу). Для побудови базису таких генераторів необхідно сформувати та розв'язати визначальну систему рівнянь. Хоча окремі операції є відносно простими, загальний процес їх виконання виявляється надзвичайно трудомістким для реалізації вручну. Саме ця обчислювальна складність історично обмежувала можливості застосування

методу Лі. Особливо це проявляється під час опрацювання великої кількості рівнянь, що виникають у випадках ДРЧП вищих порядків або систем із більш ніж двома незалежними змінними. Саме такі складні рівняння та системи з багатьма незалежними змінними найчастіше виникають у сучасній біології, медицині, теоретичній і прикладній фізиці. До типових прикладів належать система рівнянь Нав'є–Стокса, що є фундаментальним набором нелінійних ДРЧП гідродинаміки, система рівнянь хемотаксису, відома як модель Келлера–Сегеля, яка описує рух клітин або організмів у відповідь на хімічні сигнали. Остання широко використовується для моделювання процесів, таких як імунна відповідь, розвиток ембріонів, поширення бактерій тощо.

У таких ситуаціях особливо актуальним є застосування сучасних систем комп'ютерної алгебри (СКА), зокрема Mathematica, Maple та інших, які забезпечують автоматизацію процесу пошуку симетрій і значно спрощують виконання симетрійного аналізу. Це, у свою чергу, відкриває нові можливості для автоматизованого виявлення симетрій, побудови операторів Лі, інваріантів та редукованих рівнянь. Використання подібних програмних середовищ істотно зменшує обсяг аналітичних обчислень і мінімізує ризик технічних помилок, що є особливо важливим при роботі з багатовимірними та нелінійними системами рівнянь.

Концепція впровадження СКА у процес дослідження симетрій набуває більшої актуальності при розгляді узагальнень класичного методу Лі. А саме, зі впровадженням узагальненої симетрії, поняття, що формалізовано та набуло широкого застосування в теорії диференціальних рівнянь у другій половині XX століття. Узагальнені симетрії є найширшим класом локальних симетрій і включають в себе такі більш вузькі типи: контактні, Лі-Беклунда, вищого порядку. Вони допускають залежність генератора симетрії від похідних довільного порядку. При цьому такі

симетрії не містять інтегралів або потенціалів, що відрізняє їх від нелокальних симетрій. [2, с. 286–388; 3, с. 252–300]

Згодом, у 1969 році учені Блюман і Коул у своїй статті [4. с. 1026] запропонували метод аналізу некласичних симетрій (non-classical symmetries) диференціальних рівнянь. Однак суттєві приклади таких симетрій для нелінійних ДРЧП з'явилися пізніше у працях П. Олвера та П. Розенау [5, с. 108–109], які ввели поняття «слабкої» симетрії і привели приклад такої симетрії для нелінійного рівняння акустики. У роботі [6, с. 46] Фущич і Цифра запровадили термін «порушена» («broken») симетрія, який концептуально близький до понять «некласичної» [4. с. 1026] та «слабкої» симетрії [5, с. 108–109]. Усі три – «некласична», «слабка» та «порушена» – розглядаються як окремі випадки умовної симетрії. Згодом ці підходи були об'єднані під загальною назвою Q-умовна симетрія диференціальних рівнянь. Поняття умовної інваріантності остаточно сформувалося у праці Фущича В.І. [7, с. 6–8] і було детально викладене в монографії [1, с. 326–348].

Інший, сучасний, метод дослідження симетрій ДРЧП є метод нелокальних симетрій. Це узагальнення методу класичних симетрій, що дозволяє враховувати залежності від інтегралів, потенціалів або інших глобальних змінних, які не є локальними функціями змінних та їх похідних. Нелокальні симетрії потенційного типу уведені Блюманом, Кумеєм і Рідом [8, с. 806–808].

Існує значна кількість пакетів СКА, які забезпечують автоматизоване обчислення симетрій Лі, симетрій Лі-Беклунда та некласичних симетрій. Основі пакети та модулі потужних СКА для аналізу вказаних симетрій ДРЧП та їх систем, наведено в табл. 1.

Очевидно, що пакети SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations) та PDEtools вирізняються серед інших за своїми функціональними можливостями. Незважаючи на те, що SADE не є

офіційним модулем Maple, він здобув широку популярність як потужний зовнішній інструмент. Його часто застосовують для аналізу складніших або узагальнених типів симетрій, зокрема деяких некласичних випадків, у яких можливості PDEtools виявляються обмеженими або потребують значних ручних втручань, див. табл. 2.

Таблиця 1

Пакети та модулі СКА для дослідження симетрії Лі

Назва пакету / модуля	СКА	Розробник(и)	Точкові симетрії	Узагальнені симетрії	Некласичні симетрії	Розв' язання системи визначальних рівнянь
DIFFGROB2	Maple	Mansfield	Ні	Ні	Ні	Редукція
Liesymm	Maple	J. Carminati	Так	Ні	Ні	Автоматично
SYMCAL	Maple Macsyma	Reid & Wittkopf	Ні	Ні	Ні	Редукція
GeM	Maple	A.F. Cheviakov	Так	Ні	Так	Автоматично
SADE	Maple	Rocha Filho, Annibal Figueiredo	Так	Так	Так	Автоматично
PDEtools	Maple	E.S. Cheb-Terrab and K. von Bulow.	Так	Так	Так	Автоматично
JetCalculus.m	Maple	I. Anderson	Так	Так	Ні	Так
Lie	Mathematica	G. Baumann	Так	Ні	Так	Так
LieBaecklund	Mathematica	G. Baumann	Ні	Так	Ні	Автоматично
MathSym	Mathematica	S. Herod, G. Baumann	Так	Ні	Так	Редукція
MathLie	Mathematica	G. Baumann	Так	Так	Ні	Редукція
PDELIE	Macsyma	Vafeades	Так	Так	Ні	Так
SYM_DE	Macsyma	Steinberg	Так	Ні	Ні	Partially
SYMMGRP.MAX	Macsyma	Champagne et al.	Так	Ні	Так	Автоматично

Джерело: складено авторами на основі [9, с. 141]

У процесі наукових досліджень, пов'язаних із симетрійним аналізом диференціальних рівнянь із частинними похідними, розширений пакет PDEtools, орієнтований на символічну обробку таких рівнянь, може бути ефективно доповнений модулями пакету DifferentialGeometry. Останній включає підпакет JetCalculus розроблено спеціально для автоматизованого виявлення симетрій Лі-Беклунда, що значно розширює можливості аналізу

порівняно з базовим функціоналом PDEtools. Він не завжди встановлений за замовчуванням, але доступний як зовнішнє доповнення.

Таблиця 2

Порівняння пакетів SADE і PDEtools

Критерій		SADE	PDEtools	GeM
Тип пакету		Зовнішній (неофіційний)	Офіційний модуль Maple	Зовнішній (неофіційний)
Класичні симетрії		Повна підтримка	Повна підтримка	Повна підтримка
Некласичні	Узагальнені симетрії (контактні, Лі-Беклунда, вищого порядку)	Повна підтримка	Потребує ручного втручання	Повна підтримка
	Потенційні та нелокальні симетрії	Часткова підтримка	Не підтримуються	Повна підтримка
Інтерфейс користувача		Командний, з гнучкими опціями	Інтегрований у Maple, зручний для базових задач	Командний, з гнучкими опціями
Документація		Досить повна, англомовна, орієнтована на дослідників, англомовна	Офіційна, добре структурована, багатомовна	Повна із прикладами, орієнтована на дослідників, англомовна
Підтримка Maple		Відверсії Maple 13	Вбудований у всі сучасні версії	Від версії Maple 12
Типові задачі симетрійного аналізу ДРМФ		Узагальнені та умовні симетрії,	Класичні симетрії,	Нетривіальні симетрії
		редукція, пошук інваріантів та інваріантних розв'язків, знаходження інтегралів руху, перших інтегралів і консервативних законів, робота з системами рівнянь		
Продуктивність при дослідженні складних моделей		Висока	Вище середньої	Висока

Джерело: розробка авторів

При дослідженні функціональних можливостей пакетів та рівнів їх ефективності застосовано гетерогенну методику. Проведена наукова розвідка підтвердила потребу інкорпорування до аналізу симетрій систем ДРМФ новітніх програмних засобів комп'ютерної математики. Посилення

конкатенації сприятиме автоматизації процесів аналізу неліївських симетрій систем ДРЧП.

Література

1. Fushchych W.I., Shtelen V.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993. 436 p.

2. Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo : Springer-Verlag 1986. XXVI, 497 S., DM 158. (Graduate Texts in Mathematics 107)

3. Bluman G., Kumei S. Symmetries and Differential Equations. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin : 1989, 412 pp.

4. Bluman G., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech.* 1969. Vol. 18, No. 11. P. 1025–1042.

5. Olver P.J., Rosenau P., The construction of special solutions to partial differential equations. *Phys. Lett*. 1986. Vol. 114A, No. 3. P. 107–112.

6. Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry. *J. Phys. A: Math. Gen*. 1987. Vol. 20, No. 2. P. L45–L48.

7. Фущич В.І. Як розширити симетрію диференціальних рівнянь? *Симетрія та розв'язки нелінійних рівнянь математичної фізики.* Київ, Інститут математики АН УРСР, 1987. С. 4–16.

8. Bluman G., Kumei S., Reid G. New classes of symmetries for partial differential equations. *J. Math. Phys.* 1988. Vol. 29. P. 806–811.

9. Hillgarter E., Hemmecke R., Landsmann G., Winkler F. Symbolic Differential Elimination for Symmetry Analysis. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2004. Vol. 10, No. 2, pp. 123–147.